Farbengleichheitsmuster auf verdrehten $2 \times 2 \times 2$ und $3 \times 3 \times 3$ Rubik-Würfeln

Rainer Hollerbach

Bei Farbengleichheitsmustern sind alle sechs Farben auf dem Würfel genau gleich arrangiert. Wir fangen an mit einem $2 \times 2 \times 2$ Würfel, bei dem ein Eckstück einmal verdreht ist. Von dieser Ausgangsposition gibt es 21 verschiedene Gleichheitsmuster, die eine Reihe von interessanten Symmetrien aufweisen. Diese Eckmuster können dann kombiniert werden mit den anderen Stücken auf $3 \times 3 \times 3$ Würfeln, wobei Symmetrien wieder eine wichtige Rolle spielen.

Den Rubikwürfel gibt es schon seit 50 Jahren. Besonders mit der Entwicklung von immer größeren Würfeln, hat es ein erneutes Interesse gegeben. Viele Enthusiasten fokussieren auf Geschwindigkeitswettbewerbe oder auf besondere Muster, die konstruiert werden können, mitunter recht elegant. Mathematiker sind typischerweise mehr interessiert an Aspekten wie der zugrundeliegenden gruppentheoretische Struktur [1, 2] oder der maximalen Zahl von Zügen, um eine vorgegebene Anordnung zu lösen [3, 4].

Mich interessieren Muster, die auf den ersten Blick recht abstrakt erscheinen, aber eine sehr präzise mathematische Definition haben. Wir definieren ein *Farbengleichheitsmuster* als eines, in dem alle sechs Farben genau gleich verteilt sind. Das heißt, wenn man zwei identisch arrangierte Würfel hätte, könnte man sie relativ zueinander rotieren, sodass eine Farbe auf dem ersten Würfel und eine beliebige andere Farbe auf dem zweiten Würfel in allen Positionen übereinstimmen.

Abbildung 1 zeigt zwei Beispiele auf dem nur aus Eckstücken bestehenden $2 \times 2 \times 2$ Würfel. Abbildung 1a zeigt die Standardanordnung, die selbst ein Gleichheitsmuster ist, allerdings ein recht einfaches. Abbildung 1b zeigt ein komplizierteres Gleichheitsmuster, das aus der Standardanordnung konstruiert werden kann. Insgesamt gibt es zwölf solche Muster auf dem $2 \times 2 \times 2$ Würfel [5].

Als Nächstes betrachten wir Abbildung 1c, in der eine Ecke um eine Drehung im Uhrzeigersinn rotiert ist. Es gilt zuerst zu beachten, dass diese Anordnung *nicht* erreicht werden kann durch irgendeine legitime Folge von Zügen, ausgehend von Abbildung 1a, denn der Würfel hat die Eigenschaft, dass die ersten sieben Ecken beliebig rotiert werden können, aber die Orientierung der letzten Ecke ist dann fixiert [1].

Nehmen wir jedoch an, dass wir dem Würfel eine gewisse Gewalt antun und eine Ecke wie in Abbildung 1c verdrehen. Was für Farbengleichheitsmuster können aus dieser Startposition konstruiert werden?

Es stellt sich heraus, dass selbst eine Startposition so asymmetrisch und geradezu hässlich wie Abbildung 1c etliche sehr elegante Gleichheitsmuster ergibt, mit interessanten und unerwarteten Vergleichen zwischen verschiedenen Mustern. Meine Hoffnung ist, dass diese Ergebnisse nicht nur unterhaltsam sind, sondern auch nützlich, um über verschiedene Aspekte von Symmetrien drei-dimensionaler Muster im Schulunterricht zu reden.

$2 \times 2 \times 2$ Würfel

Wir fangen mit dem $2 \times 2 \times 2$ Würfel an, der nur aus Ecken besteht; die Ecken aller größeren Würfel folgen genau den gleichen Regeln. Abbildung 1c kann arrangiert werden auf $7! \cdot 3^6 \approx 4 \cdot 10^6$ verschiedene Weisen, genügend klein, dass ein Computerprogramm sie alle durchsuchen und auf Farben-

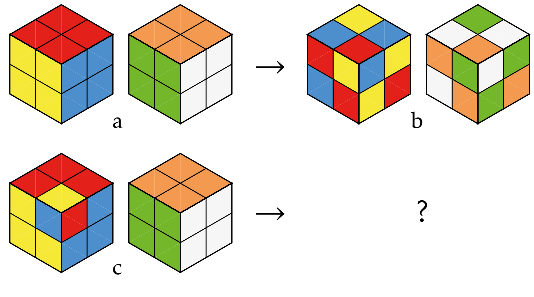

Abbildung 1. Tafel (a) zeigt die Standardanordnung; Tafel (b) zeigt ein komplizierteres Farbengleichheitsmuster, das daraus konstruiert werden kann. Tafel (c) zeigt die verdrehte Konfiguration; die Frage ist dann, was für Gleichheitsmuster daraus konstruiert werden können.

DOI 10.1515/dmvm-2024-0013

gleichheit testen kann. Abbildung 2 präsentiert die 21 gefundenen Muster. Die Darstellung hier zeigt drei Flächen auf der Vorderseite, dann wird der Würfel umgedreht und man sieht die drei Flächen auf der Rückseite. Um die verschiedenen Muster und ihre Symmetrien wirklich zu erfassen, ist es allerdings am besten, echte 3D Würfel zu konstruieren. Um dies zu erleichtern, gibt es online Zusatzmaterial mit vorgedruckten Vorlagen zum Ausschneiden und Zusammenkleben in Würfelform: tinyurl.com/dmvm-2024-0013supp

Nr. 1 ist am einfachsten zu verstehen. Alle acht Stücke bleiben in ihren Originalpositionen und sechs behalten sogar ihre Orientierung. Die anderen zwei Stücke, nämlich zwei Ecken gegenüber, werden einmal gegen den Uhrzeigersinn gedreht (gemessen relativ zu der Standardanordnung in Abbildung 1a statt der tatsächlichen Startposition in Abbildung 1c). Dieses Muster hat dann eindeutig eine bevorzugte Achse entlang dieser gegenüberliegenden Ecken, hier genommen als Rot/Gelb/Blau (R/G/B) und Orange/Grün/Weiß (O/G/W). Entlang der bevorzugten Achse gibt es diese recht hübsche drei-faltige Symmetrie, aber von anderen Achsen aus betrachtet gilt diese Symmetrie nicht. (Wir hätten natürlich auch andere Paare von Ecken gegenüber als Vorzugsachse nehmen können; genau genommen gibt es also vier Muster von diesem Typ, aber sie sind alle effektiv gleich.)

Bevor wir uns den Details der anderen Muster zuwenden, notieren wir ein paar Gemeinsamkeiten. Erstens, wir sehen in Abbildung 2, dass alle 21 Muster die gleichen R/G/B vorderen und O/G/W hinteren Eckstücke haben wie Nr. 1 – sogar mit der gleichen Orientierung. Entlang dieser spezifischen Achse gilt auch dieselbe drei-faltige Symmetrie wie zuvor. Für 19 der 21 Fälle ist dies wiederum eine bevorzugte Achse und entlang der anderen Achsen ist diese Symmetrie verloren. Die anderen zwei Fälle, weiter unten ausführlicher besprochen, haben entlang jeder Achse eine drei-faltige Symmetrie.

Die ersten 18 Muster teilen sich eine weitere Symmetrie. Insbesondere wenn wir zurückgehen zu der Standardanordnung in Abbildung 1a, bemerken wir, dass dort, wo die Vorderseite Rot ist, die Rückseite Orange ist; ähnlich passen Gelb und Grün zusammen und schließlich Blau und Weiß. Das heißt, wenn wir die Farben entsprechend der Regeln

$$\begin{aligned} \text{Rot} &\iff \text{Orange}, \\ \text{Gelb} &\iff \text{Grün}, \\ \text{Blau} &\iff \text{Weiß}, \end{aligned} \tag{1}$$

wechseln, sind vorn und hinten einfach vertauscht. Wir können ein Farbenpaar nach dem anderen überprüfen, dass die ersten 18 Muster dieses Verhältnis auch erfüllen.

Die Muster Nr. 19–21 tun dies jedoch nicht. Für diese drei Muster findet man einige Farbflecken, wo vorn und hinten nicht in dieser Beziehung stehen. Das heißt, diese drei sind auch Farbengleichheitsmuster, aber die Art und Weise, wie die sechs gleichen Farben auf einem Würfel zusammenpassen, ist anders als bei den ersten 18 Mustern. Dies wird auch sehr deutlich, wenn man die tatsächlichen Würfel betrachtet. Bei den ersten 18 gewöhnt man sich schnell daran, wie man sie umdrehen muss, um z. B. Rot mit Orange zu vergleichen, aber diese Art des Umdrehens gilt nicht mehr für die letzten drei. Bei den letzten drei Würfeln muss man etwas anders drehen, um zu erkennen, dass Rot, Orange usw. alle gleich verteilt sind.

Alle 21 Muster haben auch eine Händigkeit. Beispielsweise werden für Nr. 1 die Eckstücke R/G/B und O/G/W gegen den Uhrzeigersinn und nicht im Uhrzeigersinn gedreht. Bei einigen anderen Mustern ist die Händigkeit manchmal weniger offensichtlich, aber sie ist in jedem Fall vorhanden. Das heißt, alle 21 Muster unterscheiden sich von ihren Spiegelbildern – diese sind die Gleichheitsmuster für die Startposition, in der eine Ecke gegen den Uhrzeigersinn gedreht ist, nicht wie in Abbildung 1c im Uhrzeigersinn.

Es stellt sich heraus, dass es zu allen Muster noch mehr zu sagen gibt:

1. Die Muster in der ersten Reihe von Abbildung 2, Nr. 1–3, haben alle die Eigenschaft, dass die Farben vollständig getrennt sind, das heißt also, die Vorderseite enthält nur Rot, Gelb, Blau, und die Rückseite nur Orange, Grün, Weiß.
2. Die Muster in der zweiten Reihe von Abbildung 2, Nr. 4–6, haben fast die gegenteilige Eigenschaft. Mit Ausnahme der R/G/B- und O/G/W-Ecken, die bei allen Mustern an ihrem Platz bleiben, sind die restlichen Farben so verteilt, dass Orange, Grün, Weiß alle auf der Vorderseite und Rot, Gelb, Blau alle auf der Rückseite sind.
3. Als Nächstes vergleichen wir Nr. 7 und 8. Sie sind fast identisch, mit nur einem Diagonalpaar, das auf jeder Fläche ausgetauscht werden muss, um das andere Muster zu erhalten. Wo beispielsweise Nr. 7 auf der oberen Fläche der Vorderseite Rot-Orange als diagonales Paar hat, hat Nr. 8 an denselben Stellen Orange-Rot. Wenn auf allen sechs Flächen derselbe diagonale Austausch durchgeführt wird, gehen Nr. 7 und 8 ineinander über. Wir vergleichen als Nächstes Nr. 9 und 10 sowie Nr. 11 und 12. Genau die gleiche Beziehung gilt auch für sie.
4. Der Vergleich zwischen Nr. 13 und 14 sowie der Paare {15,16} und {17,18} bleibt Ihnen überlassen. Antworten auf diese und weitere Fragen finden Sie im Zusatzmaterial.
5. Nr. 19 hat die amüsante Eigenschaft, dass die Vorderseite identisch ist mit der Vorderseite von Nr. 11, während die Rückseite identisch ist mit der Rückseite von Nr. 12. Wir erinnern auch daran, dass, wie im Punkt 3 erwähnt, Nr. 11 und 12 bereits eng miteinander verbunden sind. Es stellt sich jetzt die Frage: Was passiert, wenn man die Vorderseite von Nr. 12 mit der Rückseite von Nr. 11 kombiniert? Sollte dies nicht auch ein Gleichheitsmuster sein, da es keinen grundsätzlichen Unterschied zwischen ‚vorn' und ‚hinten' gibt? Wo erscheint es dann in Abbildung 2?
6. Nr. 20 und 21 haben eine weitere recht hübsche Beziehung. Ihre Vorderseiten sind identisch, aber ihre Rückseiten sind durch dieselben diagonalen Vertauschungen wie im Punkt 3 miteinander verbunden. Außerdem weisen beide Muster eine klare vorn-hinten-Asymmetrie auf, selbst wenn man sie einzeln und nicht als Paar betrachtet: Alle sechs Flächen haben zwei gleiche Farben, die aber auf Vorder- und Rückseite auf entgegengesetzten

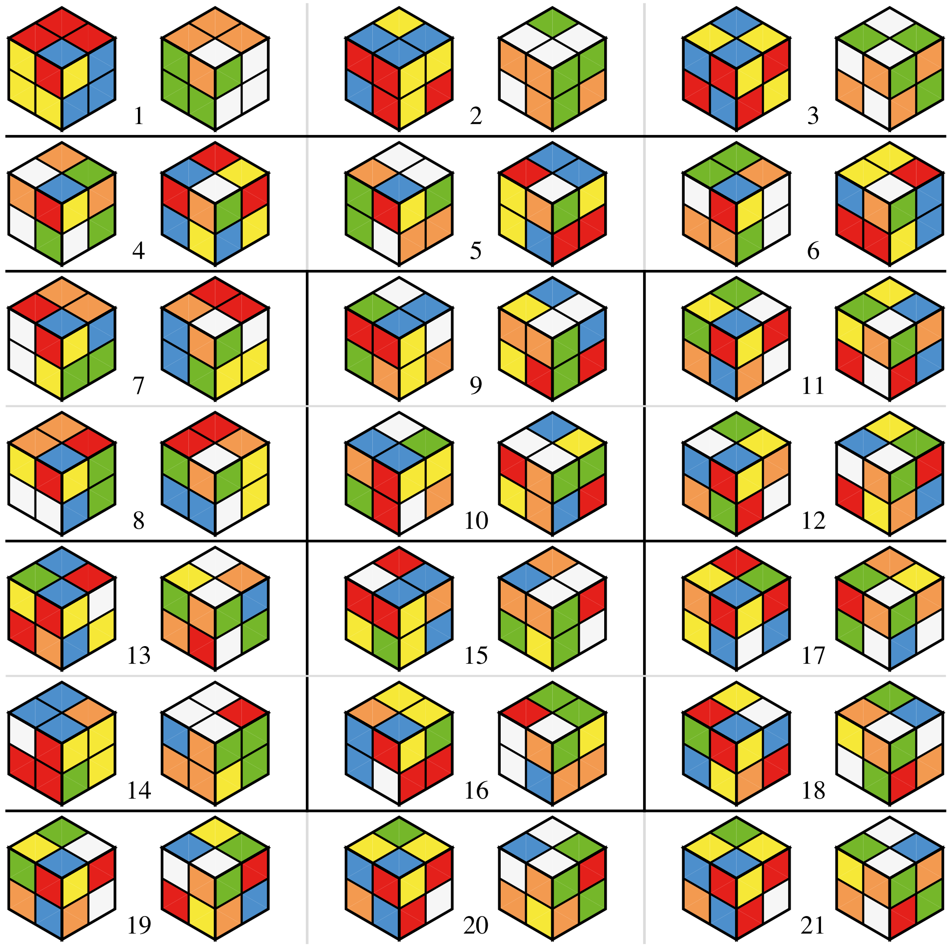

Abbildung 2. Die 21 möglichen Eckmuster – die schwarzen Linien gruppieren sie, um Vergleiche zu vereinfachen.

Diagonalen liegen. Die Existenz dieses Paares wirft erneut die Frage auf: Sollte es nicht auch ein Paar geben, bei dem die Rückseiten identisch sind und die Vorderseiten durch den diagonalen Austausch wie in Punkt 3 miteinander verbunden sind?

Wie schon erwähnt, gibt es zwei Muster, bei denen die (R/G/B–O/G/W)-Achse nicht bevorzugt ist und die Muster stattdessen entlang aller Achsen weitgehend gleich aussehen. Diese beiden sind Nr. 11 und 20. Bei Nr. 11 bleibt jedes Stück in seiner ursprünglichen Position und wird relativ zur Standardanordnung einmal gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Bei Nr. 20 bleibt jedes Stück auch an seiner ursprünglichen Position, und jedes zweite behält sogar seine ursprüngliche Orientierung. Die andere Hälfte wird jeweils einmal im Uhrzeigersinn gedreht. Anhand dieser Konstruktionen können wir erkennen, dass es in der Tat keine bevorzugten Achsen gibt. Zusätzlich wird dann die oben erwähnte vorn-hinten-Asymmetrie von Nr. 20 klar: Egal, welche Achse gewählt wird, es wird immer eine Ecke gedreht und eine nicht, was zu dem Unterschied zwischen Vorder- und Rückseite führt.

Es ist auch interessant, Vergleiche mit den Mustern für den Original-Würfel [5] anzustellen. Zum Beispiel ist Nr. 1 eindeutig mit Abbildung 1a verwandt, indem einfach die R/G/B- und O/G/W-Ecken in Abbildung 1a einmal gegen den Uhrzeigersinn gedreht werden. Nr. 2 ist in gleicher Weise mit Abbildung 1b verwandt. Die offensichtliche Frage ist also: Welche anderen Muster passen auf diese Weise zusammen? Angesichts der beteiligten Zahlen, 12 Muster in [5] gegenüber 21 Mustern hier, kann es nicht ganz so einfach sein wie eine Eins-zu-eins-Übereinstimmung, aber welche passen zusammen und welche nicht, und warum?

$3 \times 3 \times 3$ **Würfel**

Wie oben erwähnt, bleiben die Ecken aller größeren Würfel wie in Abbildung 2. Es geht also ‚nur‘ darum, diese Eckmuster mit den Zentren und Seitenteilen in $3 \times 3 \times 3$ Würfeln zusammenzufügen. Die Zentren bilden ein starres Gitter; es gibt also nur 24 Möglichkeiten, sie relativ zu einem der Muster in Abbildung 2 zu orientieren. Es gibt dennoch hier schon einige interessante Überraschungen. Abbildung 3 zeigt drei mögliche Orientierungen der Zentren, zusammen mit den Eckmustern Nr. 2, 11 und 19. Für Nr. 2 ist die Orientierung (a) die einzige Möglichkeit, die noch ein Far-

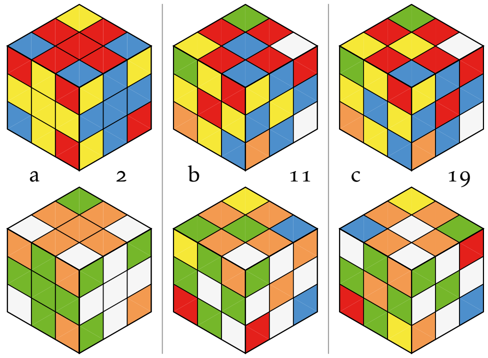

Abbildung 3. Die Buchstaben (a, b, c) bezeichnen die Orientierung der Zentren; es handelt sich dabei um eine sequentielle Drehung um die bevorzugte Achse (R/G/B – O/G/W). Die Zahlen (2, 11, 19) beziehen sich auf die Eckmuster aus Abbildung 2. Der Einfachheit halber werden die Seitenteile an ihren ursprünglichen Positionen gelassen.

bengleichheitsmuster ergibt. Für Nr. 11 funktionieren alle drei Orientierungen (a, b, c), während für Nr. 19 nur (a, c) funktionieren. Welche Aspekte dieser Eckmuster verursachen diese Unterschiede? Und was ist dann mit Nr. 12, die sowohl Nr. 11 als auch Nr. 19 ziemlich ähnlich war? Ausführliche Erläuterungen gibt es wieder im Zusatzmaterial, aber fühlen Sie sich ermutigt, zunächst eigene Lösungen auszuprobieren.

Für die Seitenteile wurden die verschiedenen Möglichkeiten zuvor in [5] aufgeführt, wo allerdings nur relativ einfache Kombinationen präsentiert wurden. Die Beziehung (1) – die in [5] gar nicht erwähnt wurde – erweist sich für die Seitenteile auch als genauso wichtig wie für die Ecken. Das Zusatzmaterial enthält daher eine ausführliche Diskussion aller Seitenteilmuster und klassifiziert sie danach, ob sie (1) erfüllen oder nicht, und wie sich dies darauf auswirkt, mit welchen Eckmustern sie kombiniert werden können.

Literatur

[1] C. Bandelow, *Inside Rubik's Cube and Beyond*. Birkhäuser, 1982.

[2] J. Chen, *Group Theory and the Rubik's Cube* (Lecture Notes), 2004. tinyurl.com/Chen-cube

[3] T. Rokicki, H. Kociemba, M. Davidson, J. Dethridge, The diameter of the Rubik's Cube group is twenty. *SIAM Review* **56**, 645–670, 2014.

[4] E. D. Demaine, M. L. Demaine, S. Eisenstat, A. Lubiw, A. Winslow, Algorithms for solving Rubik's Cubes. *European Symp. on Algorithms*, 689–700, 2011.dspace.mit.edu/handle/1721.1/73771

[5] R. Hollerbach, Colour equality patterns on Rubik's Cubes. *Mathematics Today* **59**, 115–117, 2023. eprints.whiterose.ac.uk/199822/

Prof. Dr. Rainer Hollerbach
School of Mathematics, University of Leeds
Woodhouse Lane, Leeds LS2 9JT, England
r.hollerbach@leeds.ac.uk

Rainer Hollerbach ist Professor für angewandte Mathematik an der Universität Leeds. Seine Fachgebiete sind Strömungen und Magnetfelder in astrophysikalischen Objekten. Seine Eltern waren ursprünglich aus Deutschland, aber er ist hauptsächlich in Amerika aufgewachsen und lebt nun in England. Im akademischen Jahr 2001/2002 war er als Alexander-von-Humboldt-Stipendiat an der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus (heute BTU Cottbus-Senftenberg).