



Deposited via The University of Sheffield.

White Rose Research Online URL for this paper:

<https://eprints.whiterose.ac.uk/id/eprint/97733/>

Version: Submitted Version

Proceedings Paper:

Michelitsch, T., Maugin, G., Nicolleau, F. et al. (2010) Relations de dispersion pour des chaînes linéaire comportant des interactions harmoniques auto-similaires. In: Actes du 10ème Congrès Français d'Acoustique. 10ème Congrès Français d'Acoustique, 12-16 Apr 2010, Lyon, France. Société Française d'Acoustique - SFA, Lyon, France.

hal-00530290

Reuse

Items deposited in White Rose Research Online are protected by copyright, with all rights reserved unless indicated otherwise. They may be downloaded and/or printed for private study, or other acts as permitted by national copyright laws. The publisher or other rights holders may allow further reproduction and re-use of the full text version. This is indicated by the licence information on the White Rose Research Online record for the item.

Takedown

If you consider content in White Rose Research Online to be in breach of UK law, please notify us by emailing eprints@whiterose.ac.uk including the URL of the record and the reason for the withdrawal request.

Relations de dispersion pour chaînes linéaires comportant des interactions harmoniques auto-similaires

T.M. Michelitsch^{1*} G.A. Maugin¹ F. C. G. A. Nicolleau², A. F. Nowakowski², S. Derogar³

¹ Institut Jean le Rond d'Alembert
CNRS UMR 7190
Université Pierre et Marie Curie, Paris 6
France

² Department of Mechanical Engineering, University of Sheffield, Royaume-Uni

³ Department of Civil and Structural Engineering, University of Sheffield, Royaume-Uni

filename: michelitsch-et-al-fractal-francais.tex

déposé sur HAL

October 5, 2009

1 Résumé

Dans de nombreux systèmes biologiques on trouve des structures arborescentes et bifurquantes comme les poumons, les arbres, les fougères, les coquilles des escargots, le système vasculaire, etc. Tous ces systèmes se distinguent par une invariance d'échelle et se comportent donc quasiment comme des systèmes auto-similaires. Est-ce par soucis d'optimisation qu'une telle symétrie a été retenue par la nature? Quels sont les comportements dynamiques et acoustiques de tels systèmes auto-similaires? Afin de donner une réponse il faut tout d'abord comprendre le rôle de l'auto-similarité dans les comportements dynamiques comme la propagation d'ondes. Faute d'approches définitives qui décrivent la physique de systèmes auto-similaires, on introduit ici le modèle simple d'une chaîne linéaire quasi-continue correspondant à une distribution auto-similaire de ressorts qui lient des masses ponctuelles entre-elles. Dans notre modèle la densité d'énergie élastique est une fonction exactement auto-similaire. L'équation du mouvement fournit une version auto-similaire de l'opérateur de Laplace dont le spectre de valeurs propres (la relation de dispersion) est une fonction de type Weierstrass-Mandelbrot. Cette fonction est exactement auto-similaire et est de plus une fonction fractale non-différentiable.

En outre, il s'avère que dans le cas limite d'un milieu continu notre Laplacien adopte la forme d'intégrales fractionnelles. Dans ce cas la densité de vibrations se révèle être une loi de puissance pour les basses fréquences avec un exposant strictement positif qui indique l'annulation de la densité de vibrations pour une fréquence nulle. Pour de plus amples détails nous renvoyons le lecteur à notre article récent [2].

Mots-clés: Auto-similarité, fonctions auto-similaires, transformations affines, fonction de Weierstrass-Mandelbrot, fonctions fractales, loi de puissance, intégrales fractionnelles.

PACS: 05.50.+q 81.05.Zx 63.20.D-

*Corresponding author, Email: michel@lmm.jussieu.fr

2 Introduction

Ce fut dans les années soixante-dix du dernier siècle que Benoît Mandelbrot déclencha une révolution scientifique en développant sa *Géométrie Fractale* [1]. Toutefois, les origines de cette discipline remontent au moins jusqu'au 19ème siècle [3]. Depuis lors, les applications des structures fractales se développent de plus en plus, citons par exemple les antennes fractales [4, 5]. En outre, des réseaux de type Sierpinski révèlent des caractéristiques vibratoires intéressantes [6].

Tandis que des systèmes fractals et auto-similaires sont déjà un sujet d'études bien établi dans de nombreux domaines de la physique, ils attirent aussi de plus en plus d'intérêt en mécanique analytique et dans les sciences de l'ingénieur. Il faut se rendre compte qu'il y a encore une large méconnaissance de l'impact de l'auto-similarité en tant que symétrie sur les comportements physiques. Cependant quelques pas initiaux ont d'ores et déjà été effectués [6, 7, 8, 9, 10, 11], alors que le développement d'une *mécanique fractale* se fait attendre. Faute d'une théorie définitive, il est donc désirable d'établir des modèles de systèmes auto-similaires qui soient à la fois pertinents et autant que possible simples à analyser. C'est donc l'objectif de cet article que de développer un tel modèle.

Nous explorons les comportements vibratoires d'une chaîne linéaire ayant des interactions inter-particulaires harmoniques réalisant une distribution spatiale auto-similaire. Quelques études ont été consacrées aux chaînes linéaires avec aussi bien des propriétés fractales [8, 14, 15, 16, 17] que des propriétés en dépendance exponentielle [12].

Au contraire de ces articles consacrés aux grilles discrètes, nous analysons ici les comportements oscillatoires dans une chaîne linéaire qui est non seulement fractale mais aussi exactement *auto-similaire* par rapport à ses interactions inter-particulaires. Il semble que notre approche pluridisciplinaire soit utile pour la modélisation de certains problèmes en mécanique des fluides, notamment en milieux turbulents [18, 19].

La démonstration est développée comme suit : le § 3 est consacré à la construction de fonctions et opérateurs auto-similaires. Avec cette machinerie on déduit une sorte de Laplacien auto-similaire. Bien que la construction d'un tel opérateur ne soit pas unique, on démontre pourtant que cette manière de construction dispose d'une certaine justification physique. Dans une approximation continue notre Laplacien revêt la forme d'intégrales fractionnelles.

Dans le § 4 on établit un modèle physique simple de chaîne linéaire de longueur infinie comportant des interactions harmoniques (ressorts) auto-similaires. L'auto-similarité requiert une distribution continue et homogène des particules. L'équation de mouvement apparaît sous forme d'une équation d'ondes auto-similaire qui contient notre Laplacien auto-similaire. Les valeurs propres de ce Laplacien fournissent la relation de dispersion qui est une fonction de type *Weierstrass-Mandelbrot* qui comporte aussi bien l'auto-similarité que des propriétés fractales.

3 Définition du problème affiné

Tout d'abord nous définissons la notion d'"auto-similarité" en termes de fonctions et opérateurs. Nous dénommons une fonction scalaire $\phi(h)$ *exactement auto-similaire* par rapport à la variable h si la condition

$$\phi(Nh) = \Lambda\phi(h) \tag{1}$$

est satisfaite pour toutes valeurs $h > 0$. Nous dénommons (1) le "problème affiné"¹. N est un paramètre fixe pour un problème donné et $\Lambda = N^\delta$ un ensemble continu de valeurs propres dont la bande admissible de l'exposant $\delta = \frac{\ln \Lambda}{\ln N}$ est à déterminer. Une fonction qui satisfait (1) pour un certain N et une bande $\Lambda = N^\delta$ représente une solution $\phi_{N,\delta}(h)$ du problème (1) dont le paramètre fixe N est donné. Il va de soi que si une fonction $\phi(h)$ satisfait (1) elle satisfait aussi $\phi(N^s h) = \Lambda^s \phi(h)$ où $s \in \mathbf{Z}$ (zéro inclus). En choisissant $s = -1$, il est clair que nous récupérons le même problème en remplaçant N et Λ par N^{-1} et Λ^{-1} dans (1). Il s'ensuit que nous pouvons restreindre notre analyse aux valeurs $N > 1$ sans aucune perte de généralité. De plus, il est justifié pour des raisons physiques d'admettre Λ, N comme nombres réels et positifs ($\Lambda, N \in \mathbb{R}^+$).

Pour aborder le problème affiné (1) comme problème de valeurs propres, il convient d'introduire l'opérateur affiné \hat{A}_N comme suit

¹nous nous restreignons aux transformations affines de la forme $h' = Nh + c$ with $c = 0$.

$$\hat{A}_N f(h) =: f(Nh) \quad (2)$$

On vérifie facilement que l'opérateur affine \hat{A}_N est linéaire, c'est à dire que

$$\hat{A}_N (c_1 f_1(h) + c_2 f_2(h)) = c_1 f_1(Nh) + c_2 f_2(Nh) \quad (3)$$

et encore

$$\hat{A}_N^s f(h) = f(N^s h), \quad s = 0 \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty \quad (4)$$

Avec cela on peut définir des fonctions d'opérateurs. Soit $g(\tau)$ une fonction scalaire assez lisse pour être développée en série de McLaurin comme suit

$$g(\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \tau^s \quad (5)$$

nous définissons une fonction de l'opérateur affine correspondant à g par la série

$$g(\xi \hat{A}_N) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \xi^s \hat{A}_N^s \quad (6)$$

où ξ représente un paramètre scalaire. Cette fonction de l'opérateur affine agit sur une fonction $f(h)$ scalaire comme suit

$$g(\xi \hat{A}_N) f(h) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \xi^s f(N^s h) \quad (7)$$

La convergence de cette série est à vérifier pour toute fonction $f(h)$ donnée. Il est aussi utile d'exprimer l'opérateur affine en utilisation la notation explicite

$$\hat{A}_N(h) = e^{\ln N \frac{d}{d(\ln h)}} \quad (8)$$

Par ce formalisme nous sommes à même de construire les fonctions et opérateurs auto-similaires nécessaires à l'analyse, dans la § 4, du problème physique d'une chaîne linéaire auto-similaire.

3.1 Construction de fonctions et opérateurs auto-similaires

Une solution du problème affine (1) s'écrit

$$\phi(h) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \Lambda^{-s} \hat{A}_N^s f(h) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \Lambda^{-s} f(N^s h) \quad (9)$$

pour toute fonction $f(h)$ dont la série (9) converge régulièrement pour tous h . On introduit l'opérateur auto-similaire comme suit

$$\hat{T}_N = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \Lambda^{-s} \hat{A}_N^s \quad (10)$$

qui satisfait la condition d'auto-similarité $\hat{A}_N \hat{T}_N = \Lambda \hat{T}_N$. Nous soulignons le fait que nous pouvons nous restreindre aux cas $N > 1$ ($N, \Lambda \in \mathbb{R}$) et exclure le cas pathologique $N = 1$.

Il est important de préciser pour quelles fonctions $f(t)$ la série (9) est convergente. On trouve que pour qu'une fonction $f(t)$ soit admissible, elle doit satisfaire les conditions ($t > 0$) [2]

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = a_0 t^\alpha \quad (11)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = c_\infty t^\beta \quad (12)$$

où a_0, c_∞ sont des constantes. Les deux exposants $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ peuvent revêtir des valeurs réelles, positives ou négatives avec $\beta < \alpha$. Pour une telle fonction, la fonction $\phi(h)$ de (9) est convergente et donc existe si l'exposant $\delta = \frac{\ln \Lambda}{\ln N}$ est contraint par

$$\beta < \delta = \frac{\ln \Lambda}{\ln N} < \alpha \quad (13)$$

Le cas $\beta = 0$ comprend des fonctions bornées $|f(t)| < M$ ci-inclus quelques fonctions périodiques.

3.2 Une variante auto-similaire de l'opérateur de Laplace

Dans l'esprit de (9) et (10) on construit une fonction exactement auto-similaire telle que

$$\phi(x, h) = \hat{T}_N(h) (u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)) \quad (14)$$

où $u(\cdot)$ signifie un champ continu arbitraire et suffisamment lisse, et la dépendance de $\hat{T}_N(h)$ en variable h exprime que l'opérateur affine $\hat{A}_N(h)$ n'agit que sur h , de manière que $\hat{A}_N(h)v(x, h) = v(x, Nh)$. En posant $\xi = \Lambda^{-1}$ on a l'expression

$$\phi(x, h) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \xi^s \{u(x + N^s h) + u(x - N^s h) - 2u(x)\} \quad (15)$$

laquelle est auto-similaire par rapport à la variable h , soit $\hat{A}_N(h)\phi(x, h) = \phi(x, Nh) = \xi^{-1}\phi(x, h)$. Par contre elle est une fonction régulière par rapport à la variable x . De plus, on exige que le champ $u(x)$ soit Fourier transformable, ce qui impose comme condition que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| dx < \infty \quad (16)$$

existe. Il est utile de noter que

$$u(x+h) + u(x-h) - 2u(x) = 4 \sinh^2 \left(\frac{h}{2} \frac{d}{dx} \right) u(x) = h^2 \frac{d^2}{dx^2} u(x) + \mathcal{O}(h^4) \quad (17)$$

en utilisant $u(x \pm h) = e^{\pm h \frac{d}{dx}} u(x)$ avec $u(x+h) + u(x-h) - 2u(x) = (e^{h \frac{d}{dx}} + e^{-h \frac{d}{dx}} - 2) u(x)$. Ce qui est possible puisque $u(x)$ est supposée suffisamment lisse. De (16) et (17) il suit que la série (15) converge si l'exposant δ se retrouve dans l'intervalle

$$0 < \delta = -\frac{\ln \xi}{\ln N} < 2 \quad (18)$$

Alors on introduit une variante du Laplacien auto-similaire de sorte que (avec $\xi = N^{-\delta}$) [2]

$$\Delta_{(\delta, N, h)} u(x) =: \lim_{n \rightarrow \infty} N^{\delta n} \phi(x, N^{-n} h) = \phi(x, h) \quad (19)$$

où $\phi(x, h)$ est la série (15). En utilisant (17), le Laplacien (19) se réécrit comme une série d'opérateurs

$$\Delta_{(\delta, N, h)} = 4 \hat{T}_N(h) \sinh^2 \left(\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) = 4 \sum_{s=-\infty}^{\infty} N^{-\delta s} \sinh^2 \left(\frac{N^s h}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (20)$$

Notamment on observe que la condition d'auto-similarité

$$\Delta_{(\delta, N, Nh)} = N^\delta \Delta_{(\delta, N, h)} \quad (21)$$

est en fait respectée par notre Laplacien.

3.3 Approximation continue - lien avec les intégrales fractionnelles

Pour une évaluation numérique, il conviendrait d'employer une approximation continue pour le Laplacien (20). Pour cela on pose $N = 1 + \epsilon$ (avec $0 < \epsilon \ll 1$ de sorte que $\epsilon \approx \ln N$) où ϵ est un paramètre supposé petit. On définit de plus $s\epsilon = v$ avec $dv \approx \epsilon$ et $N^s = (1 + \epsilon)^{\frac{v}{\epsilon}} \approx e^v$. Dans cette approche $N^s \approx e^v$ devient une variable quasiment continue dont s parcourt tous les $s \in \mathbf{Z}$. (9) s'écrit donc

$$\phi(h) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} N^{-s\delta} f(N^s h) \approx \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta v} f(h e^v) dv \quad (22)$$

en posant $h e^v = \tau$ ($h > 0$) et $\frac{d\tau}{\tau} = dv$ avec $\tau(v \rightarrow -\infty) = 0$ et $\tau(v \rightarrow \infty) = \infty$, on trouve que

$$\phi(h) \approx \frac{h^\delta}{\epsilon} \int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau^{1+\delta}} d\tau \quad (23)$$

L'application de cette relation au Laplacien (20) donne

$$\Delta_{(\delta, \epsilon, h)} u(x) \approx \frac{h^\delta}{\epsilon} \int_0^\infty \frac{(u(x - \tau) + u(x + \tau) - 2u(x))}{\tau^{1+\delta}} d\tau \quad (24)$$

Cette intégrale existe pour $\beta < 0 < \delta < 2$ avec $\beta < -1$ du fait des conditions d'existence de l'intégrale (16) et de la relation (17). En effectuant deux intégrations partielles entre les limites $\tau = 0$ et $\tau = \infty$ on réécrit (24), à condition que $0 < \delta < 2$, sous la forme d'une convolution

$$\Delta_{(\delta, \epsilon, h)} u(x) \approx \int_{-\infty}^{\infty} g(|x - \tau|) \frac{d^2 u}{d\tau^2}(\tau) d\tau \quad (25)$$

avec le Laplacien unidimensionnel $\frac{d^2 u}{dx^2}$ et le noyau

$$g(|x|) = \frac{h^\delta}{\delta(\delta - 1)\epsilon} |x|^{1-\delta}, \quad \delta \neq 1 \quad (26)$$

et avec $g(|x|) = -\frac{h}{\epsilon} \ln |x|$ dans le cas $\delta = 1$. De plus, il conviendrait d'exprimer (25) en termes d'intégrales fractionnelles soit

$$\Delta_{(\delta=2-D, \epsilon, h)} u(x) \approx \frac{h^{2-D}}{\epsilon} \frac{\Gamma(D)}{(D-1)(D-2)} \left(\mathcal{D}_{-\infty, x}^{-D} + (-1)^D \mathcal{D}_{\infty, x}^{-D} \right) \Delta_1 u(x) \quad (27)$$

où $\Delta_1 u(x) = \frac{d^2}{dx^2} u(x)$ dénomme encore le Laplacien unidimensionnel et on a introduit $D = 2 - \delta > 0$ qui est positif dans l'intervalle admissible $0 < \delta < 2$. Nous verrons par la suite que D peut être définie dans l'intervalle $0 < \delta < 1$ comme la dimension fractale estimée [20] de la courbe de la relation de dispersion correspondant à notre Laplacien.

Dans (27) on avait introduit l'intégrale fractionnelle de *Riemann-Liouville* $\mathcal{D}_{a,x}^{-D}$ laquelle est définie par (voir par exemple [21, 22])

$$\mathcal{D}_{a,x}^{-D} v(x) = \frac{1}{\Gamma(D)} \int_a^x (x - \tau)^{D-1} v(\tau) d\tau \quad (28)$$

où $\Gamma(D)$ indique la fonction Γ qui représente une généralisation de la fonction factorielle aux nombres non-entiers positifs $D > 0$. La fonction Γ est définie par

$$\Gamma(D) = \int_0^\infty \tau^{D-1} e^{-\tau} d\tau, \quad D > 0 \quad (29)$$

Pour des entiers positifs $D > 0$, la fonction de Γ reproduit la fonction factorielle $\Gamma(D) = (D - 1)!$ avec $D = 1, 2, \dots$.

4 Le modèle physique

On considère une chaîne linéaire d'une distribution quasi-continue de particules. Chaque point spatial x correspond à un "point matériel" c'est à dire une particule. La densité de masse supposée homogène est égale à un à chaque point de masse. Chaque particule est associée à un seul degré de liberté représenté par le champ $u(x, t)$ où x est la coordonnée Lagrangienne et t le temps. Chaque particule localisée à x est non-localement connectée par des ressorts d'intensité ξ^s ($\xi = N^{-\delta}$, $N \in \mathbb{R} > 1$, $\delta > 0$) aux autres particules qui se trouvent aux positions $x \pm N^s h$ ($h > 0$), avec $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty$. Le Hamiltonien d'une telle chaîne s'écrit

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\dot{u}^2(x, t) + \mathcal{V}(x, t, h) \right) dx \quad (30)$$

Dans l'esprit de (9) l'énergie élastique $\mathcal{V}(x, t, h)$ est construite de manière auto-similaire, soit ²

$$\mathcal{V}(x, t, h) = \frac{1}{2} \hat{T}_N(h) \left[(u(x, t) - u(x + h, t))^2 + (u(x, t) - u(x - h, t))^2 \right] \quad (31)$$

où $\hat{T}_N(h)$ est l'opérateur auto-similaire de (10). On arrive donc avec $\xi = \Lambda^{-1} = N^{-\delta}$ à

$$\mathcal{V}(x, t, h) = \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \xi^s \left[(u(x, t) - u(x + hN^s, t))^2 + (u(x, t) - u(x - hN^s, t))^2 \right] \quad (32)$$

L'énergie élastique remplit donc la condition d'auto-similarité par rapport à h , soit

$$\hat{A}_N(h) \mathcal{V}(x, t, h) = \mathcal{V}(x, t, Nh) = \xi^{-1} \mathcal{V}(x, t, h) \quad (33)$$

L'exigence que l'énergie élastique soit finie entraîne la nécessité de convergence de la série (32). Pour cela on trouve pour l'exposant δ la contrainte [2]

$$0 < \delta < 2 \quad (34)$$

Afin d'établir (34) on a utilisé également le fait que $u(x, t)$ est Fourier-transformable. L'inéquation (34) détermine l'intervalle où l'énergie élastique (32) converge. L'équation de mouvement s'obtient par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\delta H}{\delta u} \quad (35)$$

(où $\delta./\delta u$ indique la dérivée fonctionnelle) soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \xi^s (2u(x, t) - u(x + hN^s, t) - u(x - hN^s, t)) \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_{(\delta, N, h)} u(x, t) \quad (37)$$

avec le Laplacien auto-similaire $\Delta_{(\delta, N, h)}$ de l'équation (20). Comme (32), l'équation du mouvement (36) existe si δ est dans l'intervalle (34). On peut réécrire (37) sous la forme compacte d'une équation d'ondes

$$\square_{(\delta, N, h)} u(x, t) = 0 \quad (38)$$

où $\square_{(\delta, N, h)}$ est l'auto-similaire analogue de l'opérateur d'Alembertien d'ondes ayant la forme

$$\square_{(\delta, N, h)} = \Delta_{(\delta, N, h)} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (39)$$

Le d'Alembertien (39) avec le Laplacien (20) décrit la propagation d'ondes dans la chaîne auto-similaire dont le Hamiltonien est donné par (30). Il semble que cette approche puisse constituer le point de départ pour une théorie générale de la propagation d'ondes dans des milieux auto-similaires.

²Le facteur supplémentaire 1/2 évite un double comptage.

Le but suivant est de déterminer la relation de dispersion, laquelle se constitue par les valeurs propres (négatives) du Laplacien semi-négatif défini (20). On utilise le fait que le champ $u(x, t)$ est Fourier-transformable et que la fonction exponentielle e^{ikx} est fonction propre du Laplacien (20). En écrivant

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(k, t) e^{ikx} dk \quad (40)$$

on se rend compte que les amplitudes de Fourier $\tilde{u}(k, t)$ satisfont

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(k, t) = -\bar{\omega}^2(k) \tilde{u}(k, t) \quad (41)$$

On obtient donc

$$\omega^2(kh) = 4 \sum_{s=-\infty}^{\infty} N^{-\delta s} \sin^2\left(\frac{khN^s}{2}\right) \quad (42)$$

La série (42) décrit une fonction de type *Weierstrass-Mandelbrot* qui est continue et qui est pour $0 < \delta \leq 1$ non-différentiable [1, 20]. La fonction de Weierstrass-Mandelbrot satisfait toujours la condition d'auto-similarité (42), soit

$$\omega^2(Nkh) = N^\delta \omega^2(kh) \quad (43)$$

sur la totalité de son intervalle de convergence (34).

On souligne le fait que seuls les exposants δ dans l'intervalle (34) sont admissible pour l'Hamiltonien (30) pour définir un problème bien posé. Il fut démontré par Hardi [20] que pour $\xi N > 1$ avec $\xi = N^{-\delta} < 1$, c'est à dire

$$0 < \delta < 1 \quad (44)$$

la fonction de Weierstrass-Mandelbrot (42) est aussi une courbe fractale ayant une dimension fractale (dimension de Hausdorff) $D = 2 - \delta > 1$. Les figures 2-4 montrent des courbes de dispersion pour des valeurs décroissantes de δ dans l'intervalle $0 < \delta < 1$. Il est bien visible que la décroissance de δ produit une croissance de la dimension fractale D . La hausse de la dimension fractale de la figure 2 à la figure 4 est bien visible par leur comportement de plus en plus turbulent. Dans la figure 4, la dimension fractale est $D = 1.9$ déjà près de la dimension 2 du plan. Par contre, la figure 1 correspond avec $\delta = 1.2$ à un cas non-fractal. Afin d'évaluer (42) approximativement il convient de remplacer la série par une intégrale en utilisant la même approximation qu'au paragraphe 3.3 ($\epsilon \approx \ln N$). Dans le cadre de cette approximation on trouve pour $|k|h$ suffisamment "petit" ($h > 0$), c'est à dire dans le cas limite d'ondes longues

$$\omega^2(kh) \approx \frac{(h|k|)^\delta}{\epsilon} C \quad (45)$$

où $(|k|h)^\delta$ doit être de l'ordre de grandeur de ϵ ou plus petit. La relation de dispersion est donc caractérisée dans le cas limite d'ondes longues, par une loi de puissance de la forme de $\bar{\omega}(k) \approx Const |k|^{\delta/2}$. La constante C qui est introduite dans (45) est donnée par l'intégrale

$$C = 2 \int_0^\infty \frac{(1 - \cos \tau)}{\tau^{1+\delta}} d\tau \quad (46)$$

laquelle existe uniquement si δ est dans l'intervalle (34). Dans ce cas limite, on obtient la densité d'oscillateurs par [2]

$$\rho(\omega) = 2 \frac{1}{2\pi} \frac{d|k|}{d\omega} \quad (47)$$

qui est normalisé de sorte que $\rho(\omega)d\omega$ compte le nombre d'oscillateurs, c'est à dire le nombre d'ondes qui se propagent avec une certaine fréquence, laquelle se trouve dans l'intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$. On obtient également pour la densité d'oscillateurs une loi de puissance sous la forme de

$$\rho(\omega) = \frac{2}{\pi \delta h} \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\delta}} \omega^{\frac{2}{\delta}-1} \quad (48)$$

avec δ toujours dans l'intervalle (34). On observe donc que la puissance $\frac{2}{\delta} - 1$ est restreinte à l'intervalle $0 < \frac{2}{\delta} - 1 < \infty$ pour $0 < \delta < 2$. En particulier, on trouve l'annulation de la densité d'oscillateurs pour une fréquence nulle $\rho(\omega \rightarrow 0) = 0$.

5 Conclusions

Nous avons construit des fonctions et opérateurs de manière auto-similaire en utilisant une certaine catégorie de fonctions traditionnelles admissibles. Avec cette approche il est possible de construire une sorte de Laplacien auto-similaire et par conséquent de l'opérateur d'Alembertien d'ondes. A l'aide de cette machinerie on déduit une equation de mouvement qui décrit la propagation d'ondes dans une chaîne auto-similaire. Nous croyons que ce-modèle est l'un des plus simple pour prendre en compte l'aspect d'auto-similarité d'un milieu. Nous démontrons également la correspondance entre notre approche et le calcul fractionnel qui fut employé plus tôt [9] afin d'aborder des problèmes physiques dans des milieux fractals.

Nous espérons que notre approche pourra servir de point de départ pour développer une théorie de la propagation d'ondes dans des milieux auto-similaires et fractals dans des contextes pluridisciplinaires.

6 Acknowledgements

Les auteurs sont reconnaissants à J.-M. Conoir et à D. Queiros-Conde pour des discussions profondes.

References

- [1] B.B. Mandelbrot, *Fractals, Form, Chance, and Dimension* (Springer, New York, 1978).
- [2] T.M. Michelitsch, G.A. Maugin, F.C.G.A Nicolleau, A.F. Nowakowski, S. Derogar, Phys. Rev. E **80**, 011135 (2009); (e-prints: hal-00371945, arXiv:0904.0780).
- [3] E.E. Kummer: J. Reine Angew. Math. **44**, 93 (1852).
- [4] N. Cohen, Commun. Q. **5**(3), 7 (1995).
- [5] S. Hohlfeld, N. Cohen, Fractals, **7**(1), 79 (1999).
- [6] A.N. Bondarenko, V.A. Levin, The 9th Russian-Korean International Symposium 2005 (unpublished) pp. 33-35.
- [7] J. Kigami, Japan J. Appl. Math. **6**(2), 259 (1989).
- [8] V.E. Tarasov, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 035101 (2008).
- [9] M. Ostoja-Starzewski, ZAMP **58**, 1085 (2007).
- [10] J.C. Claussen, J. Nagler, H.G. Schuster, Phys. Rev. E **70**, 032101 (2004).
- [11] M. Epstein, S.M. Adeeb, Int. J. Solids Struct. **45**(11-12), 3238 (2008).
- [12] T.M. Michelitsch, G.A. Maugin, A.F. Nowakowski, F.C.G.A Nicolleau, Int. J. Eng. Sci. **47**(2), 209 (2009).
- [13] K. Ghosh, R. Fuchs, Phys. Rev. B **44**, 7330 (1991).
- [14] K. Li, M.I. Stockman, D.J. Bergman, Phys. Rev. Lett. **91**(22), 227402 (2003).
- [15] S. Raghavachari, J.A. Glazier, Phys. Rev. Lett. **74**(16), 3297 (1995).
- [16] R. Kopelman, M. Shortreed, Z.-Y. Shi, W. Tan, Z. Xu, J.S. Moore, A. Bar-Haim, J. Klafter, Phys. Rev. Lett. **78**(7), 1239 (1997).

- [17] E. Domany, S. Alexander, D. Bensimon, L.P. Kadanoff, *Phys. Rev. B* **28**(6), 3110 (1983).
- [18] J.A.C. Humphrey, C.A. Schuler, B. Rubinsky, *Fluid dynamics research* **9** (1-3), 81, ISSN 0169-5983 (1992).
- [19] F.C.G.A. Nicolleau, *Contribution à la modélisation de la dispersion en milieu turbulent. Habilitation à diriger des recherches, L'École Centrale de Lyon* (2009).
- [20] G.H. Hardy, *Trans - Amer. Math. Soc.*, **17**, 301 (1916).
- [21] K.S. Miller, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, by Kenneth S. Miller, Bertram Ross (Editor), John Wiley & Sons; 1 edition (May 19, 1993). ISBN 0-471-58884-9.
- [22] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, Mathematical Studies 204, Jan von Mill (Editor) (Elsevier, Amsterdam, 2006). ISBN-10: 0444518320.

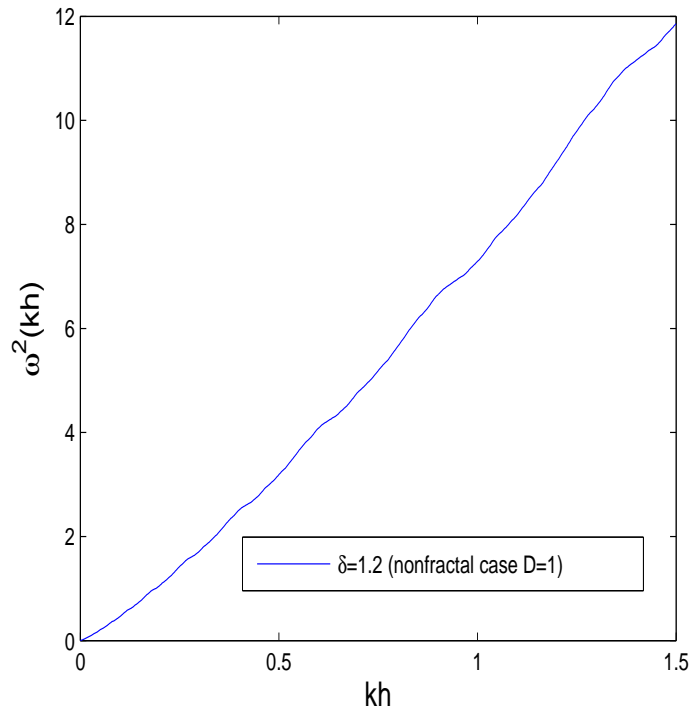


Figure 1: Relation de dispersion $\omega^2(kh)$ en unités arbitraires avec $N = 1.5$ et $\delta = 1.2$

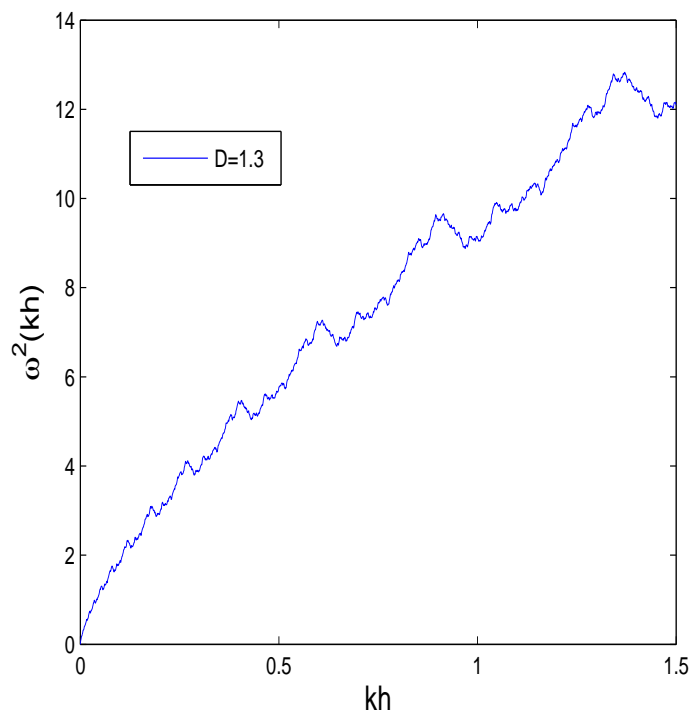


Figure 2: Relation de dispersion $\omega^2(kh)$ en unités arbitraires avec $N = 1.5$ et $\delta = 0.7$

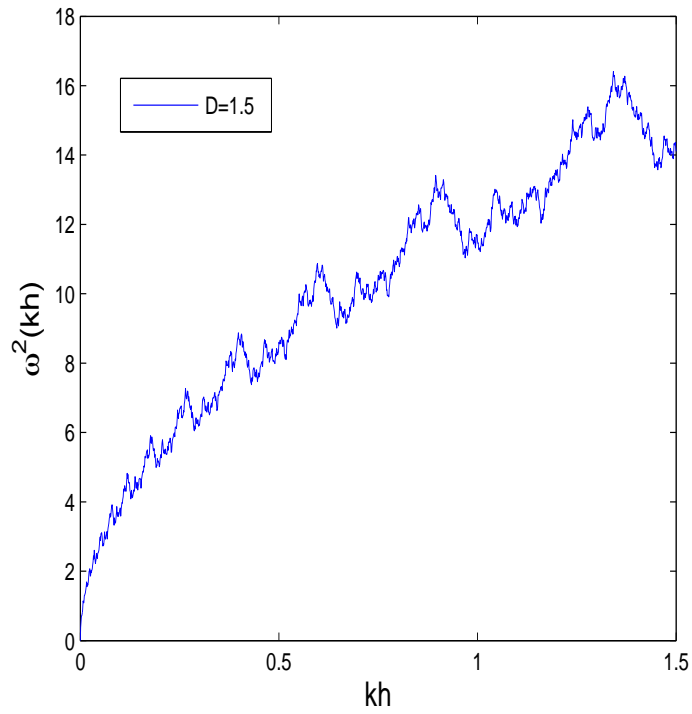


Figure 3: Relation de dispersion $\omega^2(kh)$ en unités arbitraires avec $N = 1.5$ et $\delta = 0.5$

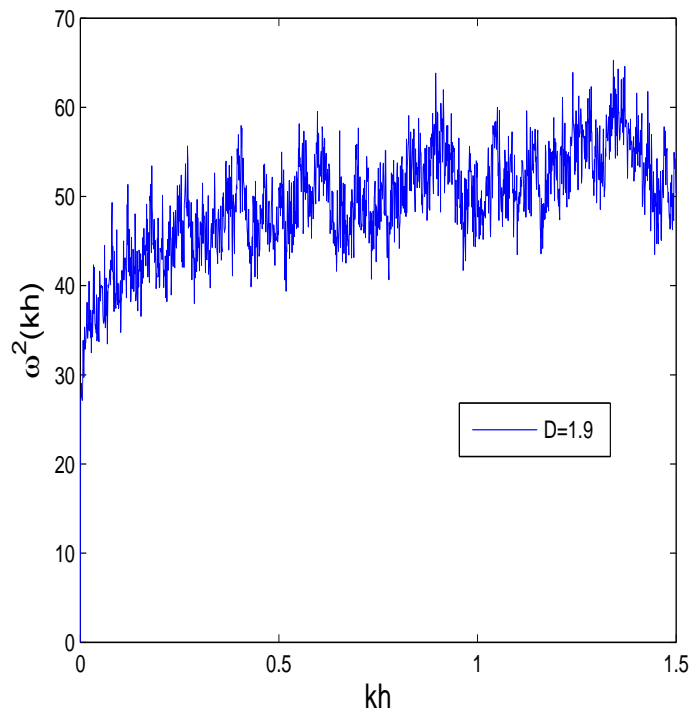


Figure 4: Relation de dispersion $\omega^2(kh)$ en unités arbitraires avec $N = 1.5$ et $\delta = 0.1$