

附面层分离流的逆算法

覃 宁

(南京航空学院)

所谓附面层的逆算法是指给定位移厚度 δ^* 或壁面剪切应力 τ_w ，而把外流速度分布 u_e 或压强分布 p 做为未知函数通过附面层方程的求解反算出来。这样就使得附面层差分计算顺利地通过分离点而不出现任何奇性^[1]，从而开辟了一条求解分离流动的非常有意义的途径。与直接求解 N-S 方程相比，它的计算量与贮存量要小得多。对实际应用来说，它是求解附面层分离气泡的好的近似方法。

本文基于 Cebeci 等人给出的附面层分离流的逆算法^[2]，提出了一种给定位移厚度 δ^* ，视外流速度分布为未知函数的附面层不可压流逆算法，其特点是采用了统一的 Falkner-Skan 变换坐标。这样首先克服了文[2]中正算法用变换坐标而逆算法用物理坐标引起的解的衔接困难，解的衔接处理得不好，常常引起解的跳跃甚至发散。再者采用相似变换坐标，各站间的变化较物理坐标小，从而 Newton 迭代中，前一站的解作为后一站的初始值收敛很快。另外，采用统一的变换坐标可以使我们用统一的程序计算从 $x=0$ 点开始的正算法过渡到含有分离的逆算法区。

一、基本方程及其变换

定常二维不可压层流附面层方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1b)$$

$$y=0, \quad u=v=0; \quad y=y_c, \quad u=u_e \quad (2)$$

正算法： u_e 已知。

逆算法： u_e 未知， δ^* 已知，附加边界条件由其定义式

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (3)$$

得出。

上述方程及其边界条件经 Falkner-Skan 变换

本文于 1984 年 6 月 14 日收到。

$$x = x, \quad \eta = \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}} y \quad (4)$$

化为

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m[1 - f'^2] = x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (5)$$

$$\eta = 0, \quad f = f' = 0; \quad \eta = \eta_e, \quad f' = 1 \quad (6)$$

正算法: u_e 已知

逆算法: u_e 未知, 附加边界条件

$$\eta = \eta_e, \quad f = \eta_e - \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}} \delta^* \quad (7)$$

其中 f 为无量纲流函数, $\psi = (u_e \nu x)^{1/2} f(x, \eta)$, $f' = \frac{u}{u_e}$, $m = \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx}$, 上标“ $'$ ”表示 $\frac{\partial}{\partial \eta}$ 。

二、数值方法

1. 差分格式

采用 Keller 盒式格式, 它是具有二阶精度的无条件稳定的隐式格式。首先将 (5) 式乘 u_e , 记 $f = F$, $\bar{u}_e = W$, 微分方程 (5) 可化为一阶微分方程组

$$F' = U \quad (8a)$$

$$U' = V \quad (8b)$$

$$WV' + \frac{1}{2} (X \frac{dW}{dX} + W) FV + X \frac{dW}{dX} (1 - U^2) = XW \left(\frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial X} - V \frac{\partial F}{\partial X} \right) \quad (8c)$$

$$\eta = 0, \quad F = U = 0; \quad \eta = \eta_e, \quad U = 1 \quad (9)$$

$$\text{逆算法: } \eta = \eta_e, \quad F = \eta_e - \sqrt{\frac{W}{X}} \bar{\delta}^* \quad (10)$$

其中 $\bar{u}_e = \frac{u_e}{u_{e0}}$, $X = \frac{x}{L}$, $\bar{\delta}^* = \delta^* \sqrt{Re_{\infty, L}} / L$

当 $X = X_0$, 在 $(X_0, \eta_{i-\frac{1}{2}})$ 点列方程; 当 $X = X_i (i > 0)$ 前两式在 $(X_i, \eta_{i-\frac{1}{2}})$ 点列方程, 第三式在 $(X_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{i-\frac{1}{2}})$ 点列方程。偏导数都采用一阶中心差商逼近。得差分方程

$$h_{i-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} (F_i - F_{i-1}) - \frac{1}{2} (U_i - U_{i-1}) = 0 \quad (11a)$$

$$h_{i-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} (U_i - U_{i-1}) - \frac{1}{2} (V_i - V_{i-1}) = 0 \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} & (WV')_{i-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left\{ X_{i-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{dW}{dX} \right)_{i-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} + W_{i-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \right\} (FV)_{i-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \\ & + X_{i-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{dW}{dX} \right)_{i-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} (1 - U^2)_{i-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} = X_{i-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} W_{i-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial X} - V \frac{\partial F}{\partial X} \right]_{i-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (11c)$$

$$j = 2, 3, \dots, J$$

$$\text{边界条件} \quad F'_j = U'_j = 0, \quad U'_j = 1, \quad F'_j + \frac{(\bar{\delta}^*)^j}{2(XW)^{1/2}} (W')^{1/2} = \eta. \quad (12)$$

上述方程及其边界条件构成了求解 $3J+1$ 个未知量 (F'_j, U'_j, V'_j, W') 的非线性代数方程组。

2. 方程组的线性化及求解

采用 Newton 迭代法, 令

$$F'_j = F'_j + \delta F_j, \quad U'_j = U'_j + \delta U_j, \quad V'_j = V'_j + \delta V_j, \quad W' = W' + \delta W$$

代入 (11) (12) 式, 略去 δ^2 以上的小量, 得线性化方程

$$h_{j+1}^{\pm} (\delta F_j - \delta F_{j-1}) - \frac{1}{2} (\delta U_j + \delta U_{j-1}) = (r_1)_j \quad (13a)$$

$$h_{j+1}^{\pm} (\delta U_j - \delta U_{j-1}) - \frac{1}{2} (\delta V_j + \delta V_{j-1}) = (r_2)_{j-1} \quad (13b)$$

$$(S_2)_j \delta F_{j-1} + (S_2)_j \delta F_j + (S_3)_j \delta U_{j-1} + (S_4)_j \delta U_j + (S_5)_j \delta V_{j-1} \\ + (S_6)_j \delta V_j + (S_7)_j \delta W = (r_3)_j \quad (13c)$$

$$j = 2, 3, \dots, J$$

$$\delta F_1 = (r_1)_1 = 0, \quad \delta U_1 = (r_2)_1 = 0, \quad \delta U_J = (r_4)_J = 0$$

$$\delta F_J + \frac{\bar{\delta}^*}{2(XW)^{1/2}} \delta W = (r_3)_J \quad (14)$$

系数矩阵可构成 4×4 的块三对角阵, 可用广义的追赶法直接求解此线性代数方程组。

Newton 迭代收敛后得本站的解, 然后把本站的解做为下一站迭代的初值, 进行下一站求解。

3. 回流区的处理

逆算法可以避免分离奇性, 但回流区若不进行处理仍会出现指数发散。文[6]从抛物型方程初边值问题适定性的角度对这一问题进行了理论分析。我们这里采用 Reyhner 和 Flügge-Lotz 提出的近似方法处理此问题^[3]。在这里即

$$u < 0 \text{ 时}, \quad f'^2 = 0, \quad f' \frac{\partial f'}{\partial x} = 0$$

4. 计算网格及附面层增长

采用变换坐标对层流附着流附面层厚度基本为常数, 法向采用非均匀网格, 近壁较密。纵向亦采用非均匀, 正算法附着流较稀, 逆算法分离区较密。由于分离, 附面层增厚, 所以, 法向网格在分离区一般需增加。

三、算 例

1. 为验证此方法的精确性, 本文首先计算了 $Re_{x,L} = 10^3$, 给定两种 δ^* 分布的层流分离流动^[4]。

计算从 $X=1.0$ 开始, 解得 Blasius 解。从第二站开始, 用给定的 δ^* 分布进行逆算, $\Delta X=0.02$, X 方向 45 站, η 方向起初 41 站, 分离后 61 站。

计算结果如图 1, 2, 与 Carter^[4] 采用型变差分格式进行整体迭代的计算结果进行了比较。

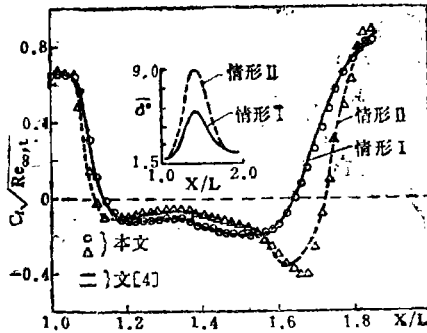


图 1

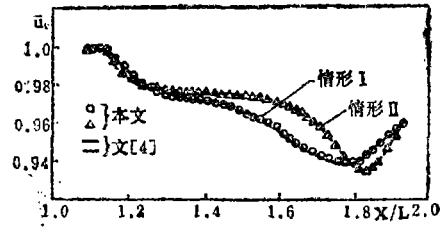


图 2

2. 根据 Horton 文 [5] 中给出的 N_{tim} 的实验数据进行了计算。前段从 $x=0$ 开始到 $x=x_{INV}$ 采用给定的实验值 u_x 进行正算法计算。从 $x=x_{INV}$ 开始进行逆算, δ^* 根据实验值输入。 $u_\infty = 9.36$ 米/秒, 计算结果与实验数据如图 3, 4 所示。

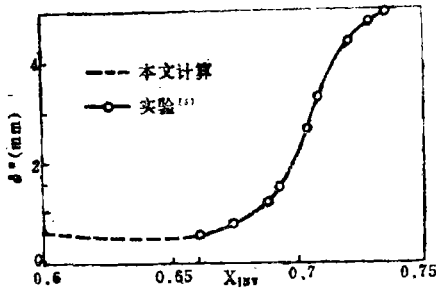


图 3

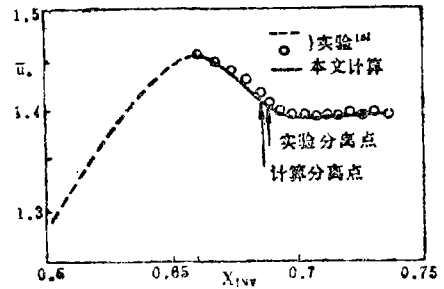


图 4

计算在 FACOM 230 机上进行, CPU 时间大约 50 秒/次。

四、讨 论

根据计算结果的比较, 我们可以看到:

1. 采用 Reyhner 和 Flügge-Lotz 近似的推进算法的计算结果与整体迭代求解的结果很吻合, 但前者的计算量与存储量较后者小得多, 是处理分离气泡的有效方法。
2. 采用统一的变换坐标, 可使正算法顺利地过渡到逆算法, 并可采用统一的程序。解在过渡点不出现跳动。

在计算及本文的写作过程中得到曹起鹏导师的热情指导与帮助, 在此谨致谢意。

参 考 文 献

- [1] Catherail, D., Mangler, K.W., *J. of Fluid Mech.* 26, 1(1968).
[2] Bradshaw, P., Cebeci, T., Whiteaw, J.H., *Engineering Calculation Methods for Turbulent Boundary Flows* (1982).
[3] Reyhner, T.A., Flügge-Lotz I., *Inter. J. of Nonlin. Mech.* 3 (1968).
[4] Carter, J.E., NASA TR-R-447 (1975).
[5] Horton, H.P., *Aero. Quar.*, 32, 3 (1981).
[6] 覃 宁, 南航科技报告, 1833 号 (1983).

AN INVERSE BOUNDARY LAYER METHOD FOR SEPARATED FLOWS

Qin Ning

(Nanjing Aeronautical Institute)

Abstract

This paper presents an numerical method for solving 2-D, steady, incompressible laminar boundary layer flows with separation and reattachment. In the method, the displacement thickness is prescribed and the boundary layer edge velocity is calculated with the boundary layer solution so that the singularity at separation point is avoided. In the reverse flow region, FLARE approximation is used. The finite-difference scheme used here is 2nd order accuracy and unconditionally stable implicit Box method. Falkner-Skan coordinates are used both in direct and inverse calculation regions in order to avoid the matching difficulty between the two regions. The results are compared with global iteration calculations and experimental data.