



Deposited via The University of Sheffield.

White Rose Research Online URL for this paper:

<https://eprints.whiterose.ac.uk/id/eprint/203431/>

Version: Published Version

---

**Article:**

Petrenko, B., Kozak, L., Kronberg, E. et al. (2022) Approbation of wave dispersion analysis using multispacecraft methods. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Astronomy (66). pp. 20-25. ISSN: 1728-273X

<https://doi.org/10.17721/btsnua.2022.66.20-25>

---

© 2022 Петренко Б., Козак Л., Кронберг Е., Баллаї І., © Year The Author(s). This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Licence (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**Reuse**

This article is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY) licence. This licence allows you to distribute, remix, tweak, and build upon the work, even commercially, as long as you credit the authors for the original work. More information and the full terms of the licence here:

<https://creativecommons.org/licenses/>

**Takedown**

If you consider content in White Rose Research Online to be in breach of UK law, please notify us by emailing [eprints@whiterose.ac.uk](mailto:eprints@whiterose.ac.uk) including the URL of the record and the reason for the withdrawal request.

УДК 551.510; 533.93

Б. Петренко, асп.  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,  
Л. Козак, канд. фіз.-мат. наук  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,  
Інститут космічних досліджень НАН України та ДКА України, Київ, Україна,  
Е. Кронберг, канд. фіз.-мат. наук  
Мюнхенський університет, Мюнхен, Німеччина,  
І. Баллаї, канд. фіз.-мат. наук  
Школа математики та статистики Шеффілдського університету, Велика Британія

## АПРОБАЦІЯ ХВИЛЬОВОГО ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ ЗА ДОПОМОГОЮ БАГАТОСУПУТНИКОВИХ МЕТОДІВ

*Детально проаналізовано методи хвильового аналізу часових рядів, а саме: двоапаратна фазова різниця, beat-former фільтрація, k-фільтрація, MSR (Multi-point Signal Resonator)-техніка. Ці багатосупутникові методи дозволяють отримувати сукупність максимумів потужності хвиль із різними просторовими масштабами за їх однакової частоти, що є суттєвою перевагою над односупутниковим підходом, оскільки в космічній плазмі може існувати значна кількість хвильових мод на одній частоті. Виконано програмну реалізацію вказаних методів з їхньою успішною апробацією на штучних даних. Продемонстровано ефективність кожного методу до виявлення максимумів у спектрах потужностей магнітного поля.*

**Ключові слова:** дисперсійний аналіз, багатосупутниковий метод, фазова різниця, beat-former фільтрація, k-фільтрація, MSR-техніка.

**Вступ.** Багатосупутникові вимірювання дозволяють проводити дослідження хвильової активності й турбулентності в космічній плазмі, розділяючи частотні та просторові градієнти [7, 10]. Важливим інструментом для виявлення хвильових мод у турбулентному середовищі є експериментальна побудова дисперсійної картини, яка відображає залежність частоти від її просторового аналога, яким є хвильовий вектор. Тому розклад таких збурень плазми за частотою та просторовому діапазону відіграє найважливішу роль у виявленні гілок дисперсійних рівнянь. Для отримання дисперсійних співвідношень використовують проєкційні методи, k-фільтрацію [3, 8], алгоритм MUSIC (MUltiple Signal Classification) [7], MSR (Multi-point Signal Resonator)-техніку [6], метод фазової різниці [1, 2], хвильову зйомку [11].

**Багатосупутникові методи.** Метод фазової різниці [1, 2] використовують для скалярних часових рядів, отриманих із даних вимірювань двох космічних апаратів (КА). Будується на основі комбінації неперервних вейвлет-перетворень Морле, що дозволяє знаходити декілька коливних мод на фіксованій частоті з їхньою потужністю, а передусім, відмовитися від припущень про плоский фронт хвиль і мализну амплітуди хвильових пакетів [4].

Для двох скалярних часових рядів  $b_1 = b_1(t)$ ,  $b_2 = b_2(t)$  обчислюється перетворення Фур'є  $b_1(\omega)$ ,  $b_2(\omega)$  та спільний частотно-хвильовий спектр  $S_{b_1 b_2}(k, \omega)$  з різницею фаз  $\varphi_{b_1 b_2}(\omega)$ :

$$S_{b_1 b_2}(\omega) = \langle b_2(\omega) b_1^*(\omega) \rangle = |S_{b_1 b_2}(\omega)| e^{j\varphi_{b_1 b_2}(\omega)}.$$

Ця інформація дозволяє знайти спроектований хвильовий вектор  $\vec{k}_p$  на напрямок  $\vec{d}$ , який сполучає два КА:

$$\vec{k}_p \vec{d} = \varphi_{b_1 b_2}(\omega).$$

Використовуючи різницю фаз  $\varphi_{b_1 b_2}(\omega)$  та  $\vec{k}_{pi}$  для кожного  $i$ -го субінтервалу, розраховують локальний спільний частотно-хвильовий спектр, або вейвлетний крос-спектр:

$$S(k_p, \omega) = \frac{1}{2} \sum_i (b_1(\omega) b_1^*(\omega) + b_2(\omega) b_2^*(\omega)) \delta(k_{pi}(\omega) - k_p).$$

У роботі програмно реалізовано вейвлетний крос-спектральний метод, на вхід якого подають часові ряди скалярної величини з вимірювань двох космічних апаратів. Результатом методу є функція, що залежить від двох незалежних змінних – частоти та проєкції хвильового вектора на напрямок сполучення між апаратами. Ця функція є потужністю збурень. Її обчислення є простішим і швидшим у двоточковому підході порівняно з використанням методів k-фільтрації. Недоліком залишається лише обмеженість визначення напрямку  $\vec{k}$  його проєкцією. Проте використання даних із 4-х КА дозволяє відмовитися від цього обмеження, попарно застосовуючи метод.

Широкого застосування набули багатосупутникові (багатоточкові, мультиапаратні) методи аналізу у геофізичній галузі, у першу чергу так званий метод k-фільтрації [3]. У галузі фізики космічної плазми він знайшов застосування для магнітометричних даних із ферозондового FGM та індукційного STAFF магнітометрів, електричного поля з інструменту EFW місії Cluster [9]. На відміну від попередніх методів, за допомогою k-фільтрації на виході отримують спектр потужності  $P = P(\omega, \vec{k})$  у чотиривимірному просторі частоти та хвильового вектора  $(\omega, k_x, k_y, k_z)$ .

Це дозволяє отримувати сукупність максимумів енергії хвиль за однакової частоти. Для всіх багатосупутникових методів інформація про масштаби хвиль і флуктуацій втрачається на масштабах, що менші відстані між КА через ефект аліасингу.

Першим етапом є вибір одночасного інтервалу даних (позначимо скалярну і векторну величини як  $b$  та  $\vec{b}$ , відповідно) з однаковими часовими відліками для всіх сенсорів (для нашого випадку – КА), кількість яких становить  $L$ .

Кожен КА у фіксований момент часу має координати  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_L$ . Для всіх часових рядів виконується перетворення Фур'є і формується вектор станів  $\vec{S}(\omega)$  [7, 8]:

$$\vec{S}(\omega) = \begin{pmatrix} b(\omega, \vec{r}_1) \\ b(\omega, \vec{r}_2) \\ \vdots \\ b(\omega, \vec{r}_L) \end{pmatrix}$$

для скалярної величини,

$$\vec{S}(\omega) = \begin{pmatrix} \vec{b}(\omega, \vec{r}_1) \\ \vec{b}(\omega, \vec{r}_2) \\ \vdots \\ \vec{b}(\omega, \vec{r}_L) \end{pmatrix}$$

для векторної величини.

З добутку вектора станів на самого себе з ермітовим транспонуванням формується симетрична крос-спектральна матриця  $\hat{R}(\omega)$ , яка має розмірність  $L \times L$  для скалярної,  $3L \times 3L$  для векторної величини:

$$\hat{R}(\omega) = \langle \vec{S}(\omega) \vec{S}(\omega)^H \rangle.$$

Положення сенсорів входить у так званий вектор наведення  $\vec{h}$  або матрицю наведення  $\hat{H}(\vec{k})$ , де закладається функціональна залежність від  $\vec{k}$ :

$$\vec{h}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \exp(j\vec{k} \cdot \vec{r}_1) \\ \exp(j\vec{k} \cdot \vec{r}_2) \\ \vdots \\ \exp(j\vec{k} \cdot \vec{r}_L) \end{pmatrix}$$

для скалярного підходу,

$$\hat{H}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \hat{E} \exp(j\vec{k} \cdot \vec{r}_1) \\ \hat{E} \exp(j\vec{k} \cdot \vec{r}_2) \\ \vdots \\ \hat{E} \exp(j\vec{k} \cdot \vec{r}_L) \end{pmatrix}$$

для векторного підходу (тут  $\hat{E}$  – одинична матриця  $3 \times 3$ ).

Багатоточкові методи, які використовують указані матриці й вектори, розділено на проєкційні та на ті, що застосовують власні значення.

Серед проєкційних методів найпростішим є обчислення проєкційно-просторового фільтрування (англ. beamforming). Потужність хвиль така:

$$P_{BF}(\omega, \vec{k}) = \vec{h}^H(\vec{k}) \hat{R}(\omega) \vec{h}(\vec{k}).$$

Але оскільки максимум такого спектра є дуже широким, використовують чутливішу проєкцію Капона [3]:

$$P_C(\omega, \vec{k}) = \left[ \vec{h}^H(\vec{k}) \hat{R}^{-1}(\omega) \vec{h}(\vec{k}) \right]^{-1}.$$

Розширення методу Капона на векторні часові ряди називають  $k$ -фільтрацією, результатом якої є матриця потужності:

$$\hat{P}_{KF}(\omega, \vec{k}) = \left[ \hat{H}^H(\vec{k}) \hat{R}^{-1}(\omega) \hat{H}(\vec{k}) \right]^{-1}.$$

Інший підхід до знаходження спектра базується на інформації з власних чисел і власних векторів матриці крос-спектральної потужності  $\hat{R}(\omega)$ .

Швидким методом для обчислення дисперсійних співвідношень є метод хвильової зйомки [11], який одразу дає функціональну залежність  $\vec{k}(\omega)$ . Специфіка інших методів, заснованих на задачі на власні числа, полягає у формуванні додаткових матриць  $\hat{F}$  та  $\hat{M}$ , які складаються відповідно з вектор-стовпців власних векторів і діагональних елементів, утворених із власних чисел  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_L$  [5, 8]:

$$F = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_L],$$

$$\hat{M}^{-n} = \text{diag} \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_L \end{pmatrix}^{-n}, \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_L \end{pmatrix}^{-n}, \dots, \begin{pmatrix} \lambda_L \\ \lambda_L \end{pmatrix}^{-n} \right).$$

Техніка MSR має суттєві дві переваги над попередніми методами, а саме: у виявленні хвиль із близькими довжинами хвиль та у зменшенні фонових шумів. Спектр потужності за методом MSR (зазвичай,  $n$  покладають рівним 2):

$$P_{MSR}(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{P_{EM_0}} P_{EM}(\omega, \vec{k}) P_{KF}(\omega, \vec{k}) =$$

$$= \frac{1}{P_{EM_0}} \frac{1}{\hat{h}^+(\vec{k}) \hat{F}(\omega) \hat{M}^{-n} \hat{F}^+(\omega) \hat{h}(\vec{k})} \frac{1}{\hat{h}^+(\vec{k}) \hat{R}^{-1}(\omega) \hat{h}(\vec{k})}$$

для скалярної величини,

$$\hat{P}_{MSR}(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{P_{EM_0}} \hat{P}_{EM}(\omega, \vec{k}) \hat{P}_{KF}(\omega, \vec{k}) =$$

$$= \frac{1}{P_{EM_0}} \left[ \hat{H}^H(\vec{k}) \hat{F}(\omega) \hat{M}^{-n} \hat{F}^+(\omega) \hat{H}(\vec{k}) \right]^{-1} \left[ \hat{H}^H(\vec{k}) \hat{R}^{-1}(\omega) \hat{H}(\vec{k}) \right]^{-1}$$

для векторної величини.

Слід матриці потужності  $\text{tr}(\hat{P}(\omega, \vec{k}))$  є загальною потужністю. Тут  $P_{EM_0}$  визначає нормування спектра від спектра  $P_{EM}$  алгоритму MUSIC (MUltiple Signal Classification):

$$P_{EM_0} = \max(P_{EM}).$$

Похибка в обчисленні спектра  $P(\omega, \vec{k})$  пов'язана з неточностями у часовій синхронізації між продуктами даних окремих часових рядів, що вносить додатковий фазовий зсув у спектр, а також із неточностями визначення взаємного розташування КА.

**Результати.** Усі методи були імплементовані у вигляді програмного пакету на мові IDL (Interactive Data Language) та асоційовані з окремими IDL-процедурами, які використовують спільний глобальний указівник на завантажені з файлів дані. Графічне представлення результатів також виконувалося засобами IDL. Апробація методів відбувалася на штучних згенерованих даних. Проведено генерацію штучних багатосупутникових даних із наперед заданими просторово-часовими характеристиками. Конфігурація КА являє собою правильний тетраедр, що рухається в заданому напрямку зі швидкістю  $0.0002 R_E/c$  зі сторонами в  $1.0 R_E$  (тут  $R_E = 6371$  км – радіус Землі). Часовий ряд змодельовано для кожного із чотирьох КА, розташованих у точках із радіус-векторами  $\vec{r}_\sigma$ , таким чином:

$$\vec{b}_\sigma = \vec{b}_0 + \vec{b}_1 \cos(\vec{k}_1 \vec{r}_\sigma - \omega_1 t) + \vec{b}_2 \cos(\vec{k}_2 \vec{r}_\sigma - \omega_2 t + \varphi_2) + \vec{\eta}_\sigma.$$

Тут  $b_0$  – фонове значення,  $b_{1,2}$  – амплітуди,  $\vec{k}_{1,2}$  – хвильові вектори збурення,  $\omega_{1,2}$  – частоти для першої та другої гармоніки відповідно,  $\varphi_2$  – фаза другої гармоніки,  $\vec{\eta}_\sigma$  позначає нормально розподілений шум із відносно малою амплітудою.

Напрямок одиничного орта хвильового вектора задають вручну як вхідні параметри. Хвильові вектори збурень обрано так, що вони мають різні абсолютні значення, але однаковий напрямок:  $\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \vec{k}$  та  $\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \vec{k}$ . Довжини

хвиль установлено такі:  $\lambda_1 = 0,1\pi R_E$ ,  $\lambda_2 = \pi R_E$ , а отже  $|\vec{k}_1| = 0,00314$  рад/км,  $|\vec{k}_2| = 0,00031$  рад/км. Частоти  $\omega_{1,2}$  можна пов'язати з хвильовими числами  $k_{1,2}$  за допомогою наперед заданого дисперсійного співвідношення. Нехай це буде звичайна альвенівська мода:

$$\omega_{1,2} = v_A k_{1,2},$$

де  $v_A$  – альвенівська швидкість. Її значення встановлено  $v_A = 0,1 R_E / c = 637$  км/с. Звідси частоти мають числові значення  $\omega_1 = 2,00$  рад/с (0,31 Гц),  $\omega_2 = 0,2$  рад/с (0,031 Гц).

Амплітуди векторного поля (середнє значення, гармоніки) мають такі значення:  $b_0 = 10$  нТл,  $b_1 = 1$  нТл,  $b_2 = 1$  нТл,  $\varphi_2 = 0,5$ ,  $\vec{\eta}_\sigma = -0,05 \dots 0,05 \vec{b}_0$ . Кількість вимірів складає 1000 з дискретністю 0,1 с. Графік змодельованих даних зображено на рис. 1.

Метод фазової різниці апробовано на штучно згенерованих багатосупутникових даних для обраної пари КА. Чітко відслідковуються два піки на частотах 0,031 Гц та 0,31 Гц (рис. 2). Установлено відповідні значення спроектованого хвильового вектора  $k_p$ . Бінування частот тут є логарифмічним (рівні інтервали частот у логарифмічному масштабі по осі  $y$ ), що є наслідком вибору частот для побудови неперервного вейвлет-перетворення. Під час трансформації частот через доплерівське зміщення є доцільнішим використання лінійного бінування.

Виконано програмну реалізацію та успішне тестування таких проєкційних багатосупутникових методів із визначення дисперсійних властивостей: beam-former,  $k$ -фільтрація, MSR. Виявлено, що чутливість методів із виявлення максимумів потужності зростає від першого до третього; ширини максимумів зменшуються; різниці між максимальним і мінімальним значеннями збільшуються; 1,5 порядки для beam-former, 5 порядків для  $k$ -фільтрації, 8 порядків для MSR (рис. 3). На рис. 3 зображено результати для другої гармоніки. Збільшення гостроти максимуму також притаманне першій гармоніці. Частота 0,032 Гц є близькою, але не точною до вхідної частоти 0,031 Гц. Це пов'язано із широкими відносними інтервалами частот із вейвлет-перетворення на низьких частотах.

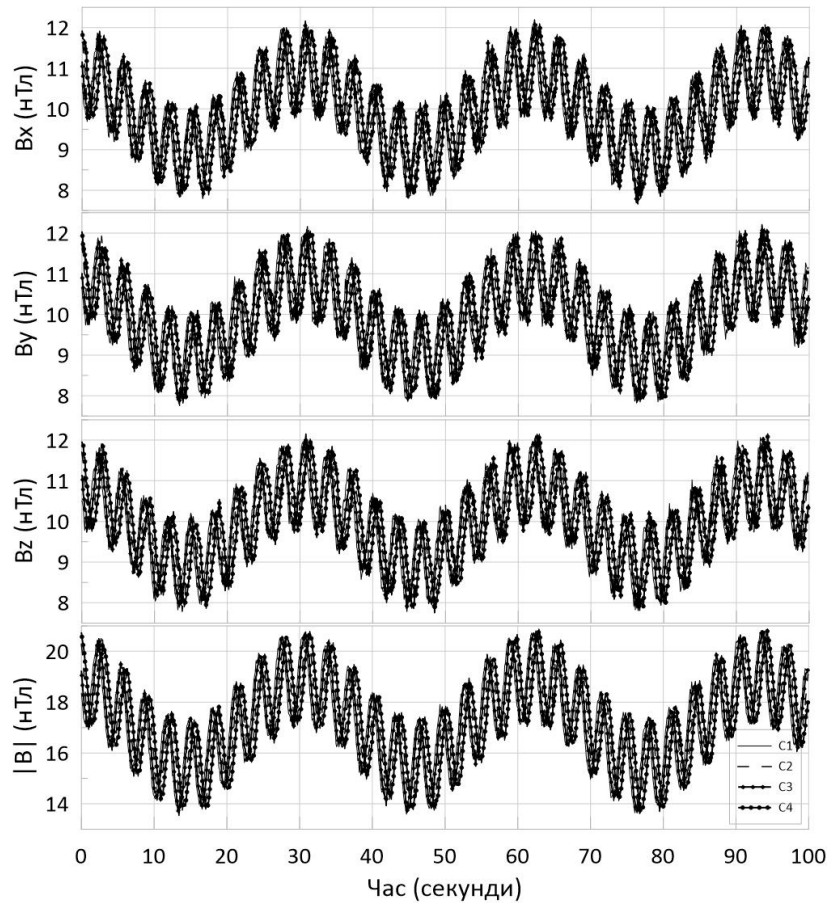


Рис 1. Штучно згенеровані багатосупутникові дані магнітного поля (згори вниз:  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ ,  $|B|$ ), кожний тип лінії позначає часовий ряд для окремого КА

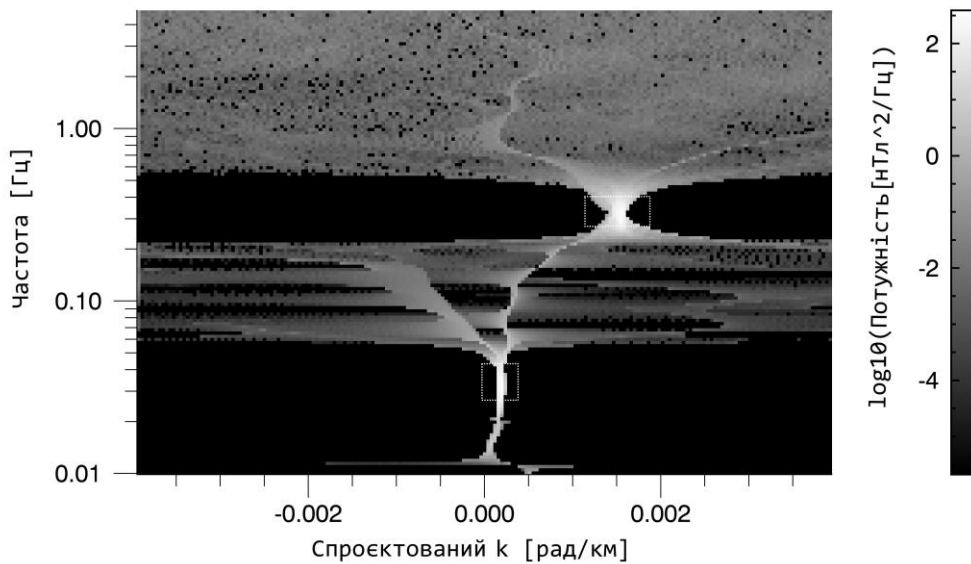


Рис 2. Спектр потужності за методом фазової різниці ( $L = 2$ ). Максимуми, що відповідають частотам першої та другої гармонік, виділено пунктирним прямокутником

**Висновок.** Багатосупутникові методи двоапаратної фазової різниці, beam-former фільтрації,  $k$ -фільтрації, MSR-техніки імплементовані як програмне забезпечення й апробовані на штучно згенерованих даних із наперед заданими просторово-часовими характеристиками. Продемонстровано ефективність кожного методу до виявлення максимумів у спектрах потужностей магнітного поля. Для проєкційних методів beam-former,  $k$ -фільтрації, MSR-техніки виявлено, що чутливість методів зростає від першого до третього.

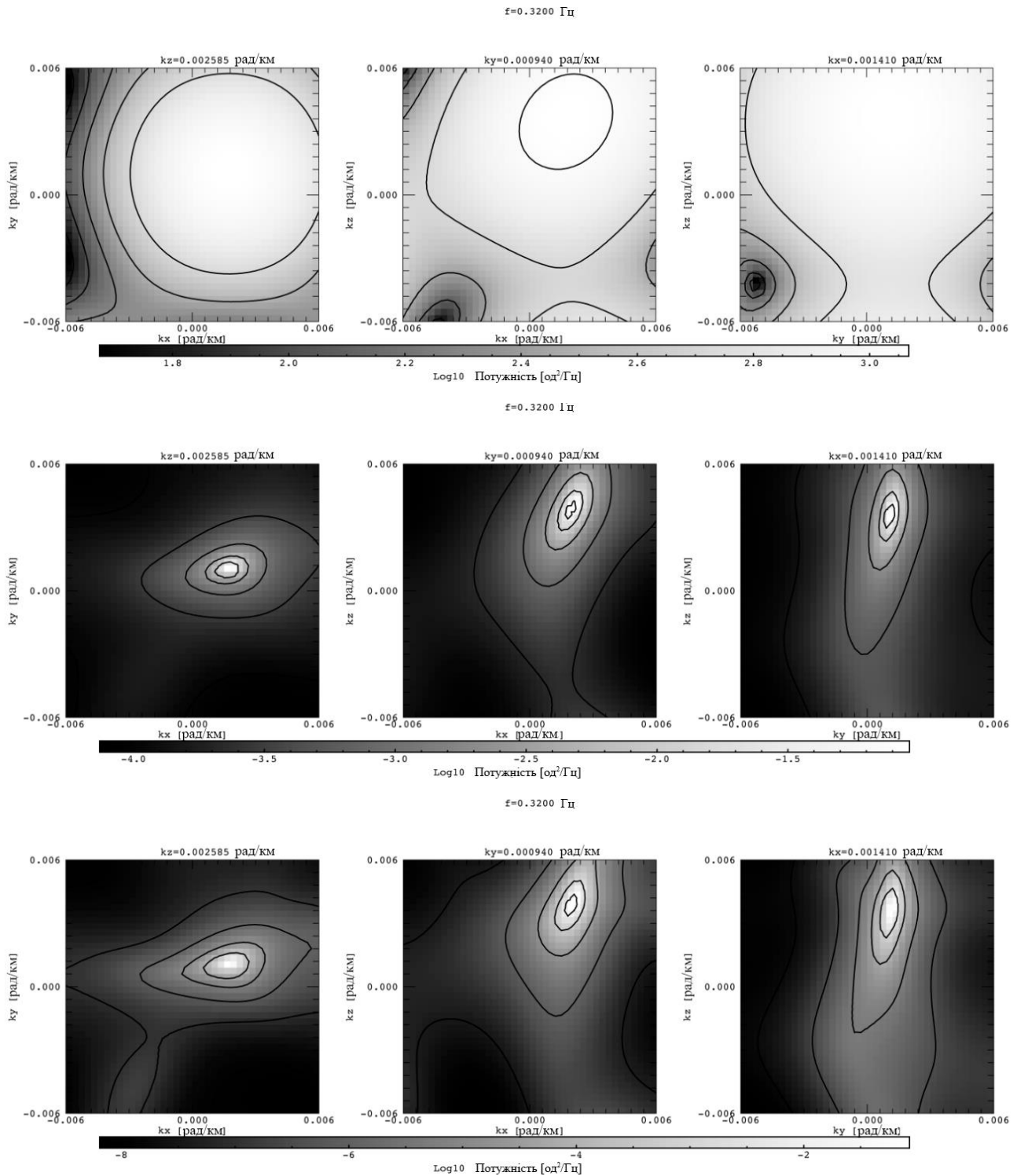


Рис 3. Спектр потужності за методами beamforming,  $k$ -фільтрації, MSR для 4-х КА ( $L = 4$ ) для частоти 0,032 Гц

**Подяка.** Роботу виконано в межах теми БФ/30-2021 і підтримано грантами Volkswagen Foundation (VW-Stiftung) № 97742, Royal Society International Exchanges Scheme 2021 IES\R1\211177.

**Список використаних джерел**

1. Balikhin M. A. et al. Experimental determination of the dispersion of waves observed upstream of a quasi-perpendicular shock //Geophysical research letters. – 1997. – Т. 24. – № 7. – С. 787–790.
2. Beall J. M., Kim Y. C., Powers E. J. Estimation of wavenumber and frequency spectra using fixed probe pairs //Journal of Applied Physics. – 1982. – Т. 53. – №. 6. – С. 3933–3940.
3. Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis //Proceedings of the IEEE. – 1969. – Т. 57. – №. 8. – С. 1408–1418.
4. Dudok de Wit T. et al. Methods for characterising microphysical processes in plasmas //Space Science Reviews. – 2013. – Т. 178. – №. 2. – С. 665–693.
5. Kozak L. V. et al. Processes in the current disruption region: From turbulence to dispersion relation //Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2021. – Т. 126. – №. 1. – С. e2020JA028404.

6. Narita Y., Glassmeier K. H., Motschmann U. High-resolution wave number spectrum using multi-point measurements in space—the Multi-point Signal Resonator (MSR) technique //Annales geophysicae. – Copernicus GmbH, 2011. – Т. 29. – № 2. – С. 351–360.
7. Narita Y. Plasma turbulence in the solar system. – Springer Science & Business Media, 2012.
8. Pincon J. L., Motschmann U. Multi-spacecraft filtering: General framework //Analysis methods for multi-spacecraft data, ISSI Sci. Rep. SR-001. Bern: ISSI. – 1998. – С. 65–78.
9. Sahraoui F. et al. ULF wave identification in the magnetosheath: The k-filtering technique applied to Cluster II data //Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2003. – Т. 108. – № A9.
10. Song P., Russell C. T. Time series data analyses in space physics //Space Science Reviews. – 1999. – Т. 87. – № 3. – С. 387–463.
11. Vogt J., Narita Y., Constantinescu O. D. The wave surveyor technique for fast plasma wave detection in multi-spacecraft data // Annales Geophysicae. – Copernicus GmbH, 2008. – Т. 26. – № 7. – С. 1699–1710.

Надійшла до редколегії 24.11.22

**B. Petrenko, PhD Student**

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,

**L. Kozak, PhD**

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,

Space Research Institute of the NASU and the SSAU, Kyiv, Ukraine,

**E. Kronberg, PhD**

Geophysics Department of Earth and Environmental Sciences University of Munich, Munich, Germany,

**I. Ballai, PhD**

School of Mathematics & Statistics at the University of Sheffield, UK

### **APPROBATION OF WAVE DISPERSION ANALYSIS USING MULTISPACECRAFT METHODS**

*Methods of wave analysis of time series are analyzed in detail, namely: two-spacecraft phase difference, beamforming, k-filtering, MSR (Multi-point Signal Resonator) technique. These multispacecraft methods allow to obtain a set of wave power peaks with different spatial scales at the same frequency, which is a significant advantage over the single-spacecraft approach due to existence a significant number of wave modes at the same frequency in space plasmas. The software implementation of these methods with their successful testing on artificial data is executed. The effectiveness of each method for detecting maxima in the power spectra of the magnetic field is demonstrated.*

*Keywords: dispersion analysis, multispacecraft method, phase difference, beamforming, k-filtration, MSR technique.*