Article:
Kisil, VV (2012) Classical/Quantum=Commutative/Noncommutative? Izvestiya Komi Nauchnogo Centra, 3 (11). pp. 4-9.

e-print: arXiv:1204.1858

CLASSICAL/QUANTUM=COMMUTATIVE/NONCOMMUTATIVE?

VLADIMIR V. KISIL

ABSTRACT. In 1926, Dirac stated that quantum mechanics can be obtained from classical theory through a change in the only rule. In his view, classical mechanics is formulated through commutative quantities (c-numbers) while quantum mechanics requires noncommutative one (q-numbers). The rest of theory can be unchanged. In this paper we critically review Dirac's proposition.

We provide a natural formulation of classical mechanics through noncommutative quantities with a non-zero Planck constant. This is done with the help of the nilpotent unit ε such that $\varepsilon^2 = 0$. Thus, the crucial rôle in quantum theory shall be attributed to the usage of complex numbers.

> ...it was on a Sunday that the idea first occurred to me that $ab - ba$ might correspond to a Poisson bracket.
>
> P.A.M. Dirac,

There is a recent revival of interest in foundations of quantum mechanics, which is essentially motivated by engineering challenges at the nano-scale. There are strong indications that we need to revise the development of the quantum theory from its early days.

In 1926, Dirac discussed the idea that quantum mechanics can be obtained from classical one through a change in the only rule, cf. [6]:

> ...there is one basic assumption of the classical theory which is false, and that if this assumption were removed and replaced by something more general, the whole of atomic theory would follow quite naturally. Until quite recently, however, one has had no idea of what this assumption could be.

In Dirac's view, such a condition is provided by the Heisenberg commutation relation of coordinate and momentum variables [6, (1)]:

$$q_r p_r - p_r q_r = \mathrm{i}h. \tag{1}$$

Algebraically, this identity declares noncommutativity of q_r and p_r. Thus, Dirac stated [6] that classical mechanics is formulated through commutative quantities ("c-numbers" in his terms) while quantum mechanics requires noncommutative quantities ("q-numbers"). The rest of theory may be unchanged if it does not contradict to the above algebraic rules. This was explicitly re-affirmed at the first sentence of the subsequent paper [5]:

> The new mechanics of the atom introduced by Heisenberg may be based on the assumption that the variables that describe a dynamical system do not obey the commutative law of multiplication, but satisfy instead certain quantum conditions.

The same point of view is expressed in his later works [7, p. 26; 8, p. 6].

Date: June 19, 2012.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 81P05; Secondary 22E27.

School of Mathematics, University of Leeds, Leeds LS2 9JT, UK..

email: kisilv@maths.leeds.ac.uk.

Web: http://www.maths.leeds.ac.uk/~kisilv/.

On leave from Odessa University.

Dirac's approach was largely approved, especially by researchers on the mathematical side of the board. Moreover, the vague version "quantum is something noncommutative" of the original statement was lightly reverted to "everything noncommutative is quantum". For example, there is a fashion to label any noncommutative algebra as a "quantum space" [4].

Let us carefully review Dirac's idea about noncommutativity as the principal source of quantum theory.

1. "Algebra" of Observables

Dropping the commutativity hypothesis on observables, Dirac made [6] the following (apparently flexible) assumption:

> All one knows about q-numbers is that if z_1 and z_2 are two q-numbers, or one q-number and one c-number, there exist the numbers z_1+z_2, z_1z_2, z_2z_1, which will in general be q-numbers but may be c-numbers.

Mathematically, this (together with some natural identities) means that observables form an algebraic structure known as a *ring*. Furthermore, the linear *superposition principle* imposes a liner structure upon observables, thus their set becomes an *algebra*. Some mathematically-oriented texts, e.g. [9, § 1.2], directly speak about an "algebra of observables" which is not far from the above quote [6]. It is also deducible from two connected statements in Dirac's canonical textbook:

(1) "the linear operators corresponds to the dynamical variables at that time" [7, § 7, p. 26].
(2) "Linear operators can be added together" [7, § 7, p. 23].

However, the assumption that any two observables may be added cannot fit into a physical theory. To admit addition, observables need to have the same dimensionality. In the simplest example of the observables of coordinate q and momentum p, which units shall be assigned to the expression $q+p$? Meters or $\frac{\text{kilos}\times\text{meters}}{\text{seconds}}$? If we get the value 5 for $p+q$ in the metric units, what is the result in the imperial ones? Since these questions cannot be answered, the above Dirac's assumption is not a part of any physical theory.

Another common definition suffering from the same problem is used in many excellent books written by distinguished mathematicians, see for example [12, § 1.1; 24, § 2-2]. It declares that quantum observables are projection-valued Borel measures on the *dimensionless* real line. Such a definition permit an instant construction (through the functional calculus) of new observables, including algebraically formed [24, § 2-2, p. 63]:

> Because of Axiom III, expressions such as A^2, A^3+A, $1-A$, and e^A all make sense whenever A is an observable.

However, if A has a dimension (is not a scalar) then the expression A^3+A cannot be assigned a dimension in a consistent manner.

Of course, physical defects of the above (otherwise perfect) mathematical constructions do not prevent physicists from making correct calculations, which are in a good agreement with experiments. We are not going to analyse methods which allow researchers to escape the indicated dangers. Instead, it will be more beneficial to outline alternative mathematical foundations of quantum theory, which do not have those shortcomings.

2. Non-Essential Noncommutativity

While we can add two observables if they have the same dimension only, physics allows us to multiply any observables freely. Of course, the dimensionality of a product is the product of dimensionalities, thus the commutator $[A, B] = AB - BA$ is well defined for any two observables A and B. In particular, the commutator (1) is also well-defined, but what is about its importance?

It is easy to argue that noncommutativity of observables is not an essential prerequisite for quantum mechanics: there are constructions of quantum theory which do not relay on it. The most prominent example is the Feynman path integral. To focus on the really cardinal moments, we firstly take the popular lectures [10], which present the main elements in a very enlightening way. Feynman managed to tell the fundamental features of quantum electrodynamics without any reference to (non-)commutativity: the entire text does not mention it at all.

Is this an artefact of the popular nature of these lecture? Take the academic presentation of path integral technique given in [11]. It mentioned (non-)commutativity only on pages 115–6, 176. In addition, page 355 contains a remark on noncommutativity of quaternions, which is irrelevant to our topic. Moreover, page 176 highlights that noncommutativity of quantum observables is a consequence of the path integral formalism rather than an indispensable axiom.

But what is the mathematical source of quantum theory if noncommutativity is not? The vivid presentation in [10] uses stopwatch with a single hand to explain the calculation of path integrals. The angle of stopwatch's hand presents the *phase* for a path $x(t)$ between two points in the configuration space. The mathematical expression for the path's phase is [11, (2-15)]:

$$\phi[x(t)] = \mathrm{const} \cdot e^{(\mathrm{i}/\hbar)S[x(t)]}, \tag{2}$$

where $S[x(t)]$ is the *classic action* along the path $x(t)$. Summing up contributions (2) along all paths between two points a and b we obtain the amplitude $K(a, b)$. This amplitude presents very accurate description of many quantum phenomena. Therefore, expression (2) is also a strong contestant for the rôle of the cornerstone of quantum theory.

Is there anything common between two "principal" identities (1) and (2)? Seemingly, not. A more attentive reader may say that there are only two common elements there (in order of believed significance):

(1) The non-zero Planck constant $\hbar$.
(2) The imaginary unit i.

The Planck constant was the first manifestation of quantum (discrete) behaviour and it is at the heart of the whole theory. In contrast, classical mechanics is oftenly obtained as a semiclassical limit $\hbar \to 0$. Thus, the non-zero Planck constant looks like a clear marker of quantum world in its opposition to the classical one. Regrettably, there is a common practice to "chose our units such that $\hbar = 1$". Thus, the Planck constant becomes oftenly invisible in many formulae even being implicitly present there. Note also, that 1 in the identity $\hbar = 1$ is not a scalar but a physical quantity with the dimensionality of the action. Thus, the simple omission of the Planck constant invalidates dimensionalities of physical equations.

The complex imaginary unit is also a mandatory element of quantum mechanics in all its possible formulations. It is enough to point out that the popular lectures [10] managed to avoid any noncommutativity issues but did mention complex numbers both explicitly (see the Index there) and implicitly (as rotations of the hand of a stopwatch). However, it is a common perception that complex numbers are a useful but manly technical tool in quantum theory.

3. Quantum Mechanics from the Heisenberg Group

Looking for a source of quantum theory we again return to the Heisenberg commutation relations (1): they are an important part of quantum mechanics (either as a prerequisite or as a consequence). It was observed for a long time that these relations are a representation of the structural identities of the Lie algebra of the Heisenberg group [12,14,15]. In the simplest case of one dimension, the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ can be realised by the Euclidean space $\mathbb{R}^3$ with the group law:

$$(s,x,y)*(s',x',y') = (s+s'+\tfrac{1}{2}\omega(x,y;x',y'),x+x',y+y'), \tag{3}$$

where ω is the *symplectic form* on $\mathbb{R}^2$ [1, § 37]:

$$\omega(x,y;x',y') = xy'-x'y. \tag{4}$$

Here, like for the path integral, we see another example of a quantum notion being defined through a classical object.

The Heisenberg group is noncommutative since $\omega(x,y;x',y') = -\omega(x',y';x,y)$. The collection of points $(s,0,0)$ forms the centre of $\mathbb{H}^1$. We are interested in the unitary irreducible representations (UIRs) of $\mathbb{H}^1$ in infinite-dimensional Hilbert spaces. For such a representation ρ, action of the centre shall be multiplication by an unimodular complex number, i.e. $\rho(s,0,0) = e^{2\pi\mathrm{i}\hbar s}I$ for some real $\hbar \neq 0$.

Furthermore, the celebrated Stone–von Neumann theorem [12, § 1.5] tells that all UIRs of $\mathbb{H}^1$ with the same value of $\hbar$ in complex Hilbert spaces are unitary equivalent. In particular, this implies that any realisation of quantum mechanics, e.g. the Schrödinger wave mechanics, which provides the commutation relations (1) shall be unitary equivalent to the Heisenberg matrix mechanics based on these relations.

In particular, any UIR of $\mathbb{H}^1$ is equivalent to a subrepresentation of the following representation on $L_2(\mathbb{R}^2)$:

$$\rho_\hbar(s,x,y) : f(q,p) \mapsto e^{-2\pi\mathrm{i}(\hbar s+qx+py)} f\left(q-\tfrac{\hbar}{2}y, p+\tfrac{\hbar}{2}x\right). \tag{5}$$

Here $\mathbb{R}^2$ has the physical meaning of the classical *phase space* with q representing the coordinate in the configurational space and p—the respective momentum. The function $f(q,p)$ in (5) presents a state of the physical system as an amplitude over the phase space. Thus the action (5) is more intuitive and has many technical advantages [12,15,28] in comparison with the well-known Schrödinger representation, to which it is unitary equivalent, of course.

Infinitesimal generators of the one-parameter semigroups $\rho_\hbar(0,x,0)$ and $\rho_\hbar(0,0,y)$ from (5) are the operators $\frac{1}{2}\hbar\partial_p - 2\pi\mathrm{i}q$ and $-\frac{1}{2}\hbar\partial_q - 2\pi\mathrm{i}p$. For these, we can directly verify the identity:

$$[-\tfrac{1}{2}\hbar\partial_q - 2\pi\mathrm{i}p, \tfrac{1}{2}\hbar\partial_p - 2\pi\mathrm{i}q] = \mathrm{i}h, \qquad \text{where } h = 2\pi\hbar.$$

Since we have a representation of (1), these operators can be used as a model of the quantum coordinate and momentum.

For a Hamiltonian $H(q,p)$ we can integrate the representation $\rho_\hbar$ with the Fourier transform $\hat{H}(x,y)$ of $H(q,p)$:

$$\tilde{H} = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{H}(x,y)\,\rho_\hbar(0,x,y)\,dx\,dy$$

and obtain (possibly unbounded) operator $\tilde{H}$ on $L_2(\mathbb{R}^2)$. This assignment of the operator $\tilde{H}$ (quantum observable) to a function $H(q,p)$ (classical observable) is known as the Weyl quantization or a Weyl calculus [12, § 2.1]. The Hamiltonian $\tilde{H}$ defines the dynamics of a quantum observable $\tilde{k}$ by the *Heisenberg equation*:

$$\mathrm{i}h\frac{d\tilde{k}}{dt} = \tilde{H}\tilde{k} - \tilde{k}\tilde{H}. \tag{6}$$

This is the well-known construction of quantum mechanics from infinite-dimensional UIRs of the Heisenberg group, which can be found in numerous sources [12,15,19].

4. Classical Noncommutativity

Now we are going to show that the balance of importance in quantum theory shall be shifted from the Planck constant towards the imaginary unit. Namely, we describe a model of classical mechanics with a non-zero Planck constant but with a different hypercomplex unit. Instead of the imaginary unit with the property $\mathrm{i}^2 = -1$ we will use the nilpotent unit ε such that $\varepsilon^2 = 0$. The *dual numbers* generated by nilpotent unit were already known for there connections with Galilean relativity [13, 27]—the fundamental symmetry of classical mechanics—thus its appearance in our discussion shall not be very surprising after all. Rather, we may be curious why the following construction was unnoticed for such a long time.

Another important feature of our scheme is that the classical mechanics is presented by a noncommutative model. Therefore, it will be a refutation of Dirac's claim about the exclusive rôle of noncommutativity for quantum theory. Moreover, the model is developed from the same Heisenberg group, which were used above to describe the quantum mechanics.

Consider a four-dimensional algebra $\mathfrak{C}$ spanned by 1, i, ε and iε. We can define the following representation $\rho_{\varepsilon h}$ of the Heisenberg group in a space of $\mathfrak{C}$-valued smooth functions [21, 23]:

$$\begin{aligned}(7)\qquad \rho_{\varepsilon h}(s,x,y):\ & f(q,p) \mapsto \\ & e^{-2\pi\mathrm{i}(xq+yp)}\left(f(q,p)+\varepsilon h\left(sf(q,p)+\frac{y}{4\pi\mathrm{i}}f'_q(q,p)-\frac{x}{4\pi\mathrm{i}}f'_p(q,p)\right)\right).\end{aligned}$$

A simple calculation shows the representation property $\rho_{\varepsilon h}(s,x,y)\rho_{\varepsilon h}(s',x',y') = \rho_{\varepsilon h}((s,x,y)*(s',x',y'))$ for the multiplication (3) on $\mathbb{H}^1$. Since this is not a unitary representation in a complex-valued Hilbert space its existence does not contradict the Stone–von Neumann theorem. Both representations (5) and (7) are *noncommutative* and act on the phase space. The important distinction is:

- The representation (5) is induced (in the sense of Mackey [18, § 13.4]) by the *complex-valued* unitary character $\rho_\hbar(s,0,0) = e^{2\pi\mathrm{i}\hbar s}$ of the centre of $\mathbb{H}^1$.
- The representation (7) is similarly induced by the *dual number-valued* character $\rho_{\varepsilon h}(s,0,0) = e^{\varepsilon hs} = 1+\varepsilon hs$ of the centre of $\mathbb{H}^1$, cf. [20]. Here dual numbers are the associative and commutative two-dimensional algebra spanned by 1 and ε.

Similarity between (5) and (7) is even more explicit if (7) is written as:

$$(8)\qquad \rho_\hbar(s,x,y): f(q,p)\mapsto e^{-2\pi(\varepsilon\hbar s+\mathrm{i}(qx+py))}f\left(q-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\varepsilon y, p+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\varepsilon x\right).$$

Here, for a differentiable function k of a real variable t, the expression $k(t+\varepsilon a)$ is understood as $k(t)+\varepsilon ak'(t)$, where $a\in\mathbb{C}$ is a constant. For a real-analytic function k this can be justified through its Taylor's expansion, see [3; 13; 29, § I.2(10)]. The same expression appears within the non-standard analysis based on the idempotent unit ε [2].

The infinitesimal generators of one-parameter subgroups $\rho_{\varepsilon h}(0,x,0)$ and $\rho_{\varepsilon h}(0,0,y)$ in (7) are

$$d\rho^X_{\varepsilon h} = -2\pi\mathrm{i}q - \frac{\varepsilon h}{4\pi\mathrm{i}}\partial_p \quad\text{and}\quad d\rho^Y_{\varepsilon h} = -2\pi\mathrm{i}p + \frac{\varepsilon h}{4\pi\mathrm{i}}\partial_q,$$

respectively. We calculate their commutator:

$$(9)\qquad d\rho^X_{\varepsilon h}\cdot d\rho^Y_{\varepsilon h} - d\rho^Y_{\varepsilon h}\cdot d\rho^X_{\varepsilon h} = \varepsilon h.$$

It is similar to the Heisenberg relation (1): the commutator is non-zero and is proportional to the Planck constant. The only difference is the replacement of the imaginary unit by the nilpotent one. The radical nature of this change becomes clear if we integrate this representation with the Fourier transform $\hat{H}(x,y)$ of a Hamiltonian function $H(q,p)$:

$$\mathring{H} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{H}(x,y)\, \rho_{\varepsilon h}(0,x,y)\, dx\, dy = H + \frac{\varepsilon h}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}\right). \tag{10}$$

This is a first order differential operator on the phase space. It generates a dynamics of a classical observable k—a smooth real-valued function on the phase space—through the equation isomorphic to the Heisenberg equation (6):

$$\varepsilon h \frac{d\mathring{k}}{dt} = \mathring{H}\mathring{k} - \mathring{k}\mathring{H}.$$

Making a substitution from (10) and using the identity $\varepsilon^2 = 0$ we obtain:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial k}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial k}{\partial p}. \tag{11}$$

This is, of course, the *Hamilton equation* of classical mechanics based on the *Poisson bracket*. Dirac suggested, see the paper's epigraph, that the commutator *corresponds* to the Poisson bracket. However, the commutator in the representation (7) *exactly is* the Poisson bracket.

Note also, that both the Planck constant and the nilpotent unit disappeared from (11), however we did use the fact $h \neq 0$ to make this cancellation. Also, the shy disappearance of the nilpotent unit ε at the very last minute can explain why its rôle remain unnoticed for a long time.

5. Discussion

This paper revises mathematical foundations of quantum and classical mechanics and the rôle of hypercomplex units $\mathrm{i}^2 = -1$ and $\varepsilon^2 = 0$ there. To make the consideration complete, one may wish to consider the third logical possibility of the hyperbolic unit j with the property $\mathrm{j}^2 = 1$ [16, 17, 20, 22, 23, 25, 26], however, this is beyond the scope of the present paper.

The above discussion provides the following observations:

1. Noncommutativity is not a crucial prerequisite for quantum theory, it can be obtained as a consequence of other fundamental assumptions.
2. Noncommutativity is not a distinguished feature of quantum theory, there are noncommutative formulations of classical mechanics as well.
3. The non-zero Planck constant is compatible with classical mechanics. Thus, there is no a necessity to consider the semiclassical limit $\hbar \to 0$, where the *constant* has to tend to zero.
4. There is no a necessity to request that physical observables form an algebra, which is a physical non-sense since we cannot add two observables of different dimensionalities. Quantization can be performed by the Weyl recipe, which requires only a structure of a linear space in the collection of all observables with the same physical dimensionality.
5. It is the imaginary unit in (1), which is ultimately responsible for most of quantum effects. Classical mechanics can be obtained from the similar commutator relation (9) using the nilpotent unit $\varepsilon^2 = 0$.

In Dirac's opinion, quantum noncommutativity was so important because it guaranties a non-trivial commutator, which is required to substitute the Poisson bracket. In our model, multiplication of classical observables is also non-commutative and the Poisson bracket exactly is the commutator. Thus, these elements do not separate quantum and classical models anymore.

Still, Dirac may be right that we need to change a single assumption to get a transition between classical mechanics and quantum. But, it shall not be a move from commutative to noncommutative. Instead, we need to replace a representation of the Heisenberg group induced from dual number-valued character by the representation induced by the complex-valued character. Our resume can be stated like the title of the paper:

Classical/Quantum=Dual numbers/Complex numbers.

Acknowledgements

I am grateful to the anonymous referee of *Mathematical Intelligencer* for many critical remarks, which helped to improve presentation and forced to increase the number of quotes in the paper. Even more importantly, the referee report confirmed a necessity of this paper to be written.

I am also grateful to the referee of of the journal *Izvestiya Komi NC*, who suggested the expression (8). At last but not least, I express my gratitude to N.A. Gromov for numerous discussions of various topics related to the idempotent unit.

References

[1] V. I. Arnol′d. *Mathematical methods of classical mechanics*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 60. Springer-Verlag, New York, 1991. Translated from the 1974 Russian original by K. Vogtmann and A. Weinstein, corrected reprint of the second (1989) edition. ↑4

[2] John L. Bell. *A primer of infinitesimal analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, Second, 2008. ↑5

[3] Francesco Catoni, Roberto Cannata, and Enrico Nichelatti. The parabolic analytic functions and the derivative of real functions. *Adv. Appl. Clifford Algebras* 14 (2):185–190, 2004. ↑5

[4] Joachim Cuntz. Quantum spaces and their noncommutative topology. *Notices Amer. Math. Soc.* 48 (8):793–799, 2001. ↑2

[5] P. A. M. Dirac. On the theory of quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 112 (762):661–677, 1926. ↑1

[6] P. A. M. Dirac. Quantum mechanics and a preliminary investigation of the hydrogen atom. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 110 (755):561–579, 1926. ↑1, 2

[7] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, London, 4th ed., 1958. ↑1, 2

[8] Paul A. M. Dirac. *Directions in physics*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Five lectures delivered during a visit to Australia and New Zealand, August–September, 1975, With a foreword by Mark Oliphant, Edited by H. Hora and J. R. Shepanski. ↑1

[9] L. D. Faddeev and O. A. Yakubovskiĭ. *Lectures on quantum mechanics for mathematics students*. Student Mathematical Library, vol. 47. American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 2009. Translated by Harold McFaden. xii, 234 p. ↑2

[10] R.P. Feynman. *QED: the strange theory of light and matter*. Penguin Press Science Series. Penguin, 1990. ↑3

[11] R.P. Feynman and A.R. Hibbs. *Quantum mechanics and path integral*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1965. ↑3

[12] Gerald B. Folland. *Harmonic analysis in phase space*. Annals of Mathematics Studies, vol. 122. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. ↑2, 4, 5

[13] N. A. Gromov. *Kontraktsii i analiticheskie prodolzheniya klassicheskikh grupp. Edinyi podkhod. (Russian) [Contractions and analytic extensions of classical groups. Unified approach]*. Akad. Nauk SSSR Ural. Otdel. Komi Nauchn. Tsentr, Syktyvkar, 1990. ↑5

[14] Roger Howe. On the role of the Heisenberg group in harmonic analysis. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 3 (2):821–843, 1980. ↑4

[15] Roger Howe. Quantum mechanics and partial differential equations. *J. Funct. Anal.* 38 (2):188–254, 1980. ↑4, 5

[16] Robin Hudson, *Generalised translation-invariant mechanics*. D. Phil. thesis, Bodleian Library, Oxford, 1966. ↑6

[17] Andrei Khrennikov. *Contextual approach to quantum formalism*. Fundamental Theories of Physics, vol. 160. Springer, New York, 2009. ↑6

[18] A. A. Kirillov. *Elements of the theory of representations*. Springer-Verlag, Berlin, 1976. Translated from the Russian by Edwin Hewitt, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 220. ↑5

[19] Vladimir V. Kisil. p-Mechanics as a physical theory: an introduction. *J. Phys. A* 37 (1):183–204, 2004. E-print: arXiv:quant-ph/0212101, On-line. Zbl1045.81032. ↑5

[20] Vladimir V. Kisil. Erlangen program at large—2 1/2: Induced representations and hypercomplex numbers. *Izvestiya Komi nauchnogo centra UrO RAN [Izvestiya Komi nauchnogo centra UrO RAN]* 5 (1):4–10, 2011. E-print: arXiv:0909.4464. ↑5, 6

[21] Vladimir V. Kisil. Erlangen programme at large: an Overview. In S.V. Rogosin and A.A. Koroleva (eds.) *Advances in applied analysis*, pages 1–78, Birkhäuser Verlag, Basel, 2012. E-print: arXiv:1106.1686. ↑5

[22] Vladimir V. Kisil. *Geometry of Möbius transformations: Elliptic, parabolic and hyperbolic actions of* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$. Imperial College Press, London, 2012. Includes a live DVD. ↑6

[23] Vladimir V. Kisil. Hypercomplex representations of the Heisenberg group and mechanics. *Internat. J. Theoret. Phys.* 51 (3):964–984, 2012. E-print: arXiv:1005.5057. ↑5, 6

[24] George W. Mackey. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. W.A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam, 1963. ↑2

[25] Valery N. Pilipchuk. *Nonlinear dynamics. Between linear and impact limits*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, vol. 52. Springer, Berlin, 2010. ↑6

[26] S. Ulrych. Considerations on the hyperbolic complex Klein-Gordon equation. *J. Math. Phys.* 51 (6):063510, 8, 2010. ↑6

[27] I. M. Yaglom. *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis*. Heidelberg Science Library. Springer-Verlag, New York, 1979. Translated from the Russian by Abe Shenitzer, with the editorial assistance of Basil Gordon. ↑5

[28] Cosmas Zachos. Deformation quantization: quantum mechanics lives and works in phase-space. *Internat. J. Modern Phys. A* 17 (3):297–316, 2002. E-print: arXiv:hep-th/0110114. ↑4

[29] D.N. Zejliger. *Kompleksnaya linei0chataya geometriya. Poverhnosti i kongruencii. [Complex lined geometry. Surfaces and congruency]*. GTTI, Leningrad, 1934. ↑5

Является ли коммутация наблюдаемых главным отличием классической механики от квантовой?

В. В. Кисиль

Аннотация. В 1926 году Дирак предположил, что квантовая механика может быть получена из классической заменой единственного допущения. По его мнению, классическая механика определяется коммутативными величинами («c-числами») в то время как квантовая требует некоммутативных («q-чисел»). Остальные допущения являются общими для обоих теорий. В данной работе мы критически пересматриваем предложение Дирака.

С этой целью мы представляем некоммутативную модель *классической* механики с ненулевой постоянной Планка. Это возможно благодаря использованию нильпотентной единицы ε такой, что $\varepsilon^2 = 0$. Следовательно, решающую роль в построении квантовой теории выполняет мнимая комплексная единица.

> ...было воскресенье и ко мне впервые пришла мысль, что $ab - ba$ может соответствовать скобке Пуассона.
>
> П.А.М. Дирак,
> http://www.aip.org/history/ohilist/4575_1.html

1. Введение

Сейчас наблюдается возрождения интереса к основаниям квантовой теории, которое поддержано заметным финансированием в различных странах. Одна из причин этого интереса связана с прикладными инженерными вопросами возникающими при работе с нано-объектами. Вычурная Копенгагенская интерпретация была удовлетворительной для сравнительно небольшого числа теоретических физиков (и может быть даже льстила их элитарному духу). Однако, для массового освоения практикующими инженерами хотелось бы иметь более реалистичную картину происходящего в микромире. В поисках таких объяснений необходимо вернуться к самым истокам квантовой теории.

В 1926 году Дирак предположил, что квантовая механика может быть получена из классической заменой единственного допущения, см. [12]:

> ...there is one basic assumption of the classical theory which is false, and that if this assumption were removed and replaced by something more general, the whole of atomic theory would follow quite naturally. Until quite recently, however, one has had no idea of what this assumption could be.[1]

[1] «...существует одно базовое допущение в классической теории, которое неверно, и если это допущение удалить или заменить чем-то более общим, вся теория атома получилась бы естественно. Однако, до недавнего времени никто не подозревал, какое это может быть допущение.»

Дирак предположил, что необходимое условие заключено в коммутационных соотношениях Гейзенберга для наблюдаемых координаты и импульса частицы [12, (1)]:

$$q_r p_r - p_r q_r = \mathrm{i}h. \tag{1}$$

Алгебраически это соотношение фиксирует некоммутативность величин q_r и p_r. Поэтому Дирак предложил [12] гипотезу о том, что классическая механика определяется коммутативными величинами («с-числами», как он их назвал) в то время как квантовая требует некоммутативных («q-чисел»). Остальная часть теории, не противоречащая предыдущему допущению, не требует изменений. Это в явном виде подтверждено в следующей статье Дирака [11]:

> The new mechanics of the atom introduced by Heisenberg may be based on the assumption that the variables that describe a dynamical system do not obey the commutative law of multiplication, but satisfy instead certain quantum conditions.[2]

Эта же точка зрения неоднократно выражалась и в более поздних работах [13, p. 26 (стр. 41 русского перевода); 14, p. 6 (стр. 11 русского перевода)].

Точка зрения Дирака получила широкое распространение, особенно среди математически ориентированных учёных. Более того, расплывчатая вариация «квантовое—это что-то такое некоммутативное» изначального предложения было с лёгкостью обращено во «всякое некоммутативное—это квантовое». Например, стало модным называть всякую некоммутативную алгебру «квантовым пространством» (“quantum space”) [10].

Давайте внимательно разберём, действительно ли некоммутативность является важнейшим источником квантовой теории.

2. «Алгебра» наблюдаемых

Отбросив предположение о коммутативности наблюдаемых Дирак делает следующее, казалось бы очень гибкое, допущение [12]:

> All one knows about q-numbers is that if z_1 and z_2 are two q-numbers, or one q-number and one c-number, there exist the numbers z_1+z_2, z_1z_2, z_2z_1, which will in general be q-numbers but may be c-numbers.[3]

Математически это предположение (совместно с некоторыми естественными соотношениями) обозначает, что наблюдаемые образуют алгебраическую структуру называемую *кольцом*. Далее, линейный *принцип суперпозиции* требует, что бы у наблюдаемых была так же структура векторного пространства, что вместе с предыдущем условием характеризует множество всех наблюдаемых как *алгебру*. Некоторые работы, ориентированные в первую очередь на математиков, см. [6, § 1.2], прямо говорят об «алгебре наблюдаемых», что мало отличается от предыдущей цитаты из [12]. Это так же следует из двух взаимосвязанных допущений, содержащихся в каноническом учебнике Дирака, на котором выросло не одно поколение исследователей:

(1) «линейные операторы соответствуют динамическим переменным» [13, § 7, p. 26, стр. 40 русского перевода].

---

[2] «Новая механика атома, предложенная Гейзенбергом, может быть основана на допущении, что переменные описывающие динамику системы не следуют закону коммутативности умножения, вместо этого удовлетворяют некоторым квантовым соотношениям.»

[3] «Всё, что мы знаем о q-числах это, если z_1 и z_2—два q-числа, или одно q-число и одно c-число, тогда существуют величины $z_1 + z_2$, z_1z_2, z_2z_1, которые в общем случае являются q-числами, но могут оказаться и c-числами.»

(2) «линейные операторы можно складывать» [13, § 7, p. 23, стр. 38 русского перевода].

Однако, предположение, что любые две наблюдаемые допускают сложение, полностью несовместимо с их физическим смыслом. Что бы сложение было возможно обе наблюдаемые должны иметь одну размерность. Это тщательно объясняют ученикам средних школ («нельзя складывать сапоги с яблоками», как говорил мой учитель физики), но зачастую требуют забыть в ВУЗовских учебниках. Поэтому, стоит немного задержаться на этом элементарном вопросе. Например, для наблюдаемых координаты q и импульса p, какова должна быть размерность выражения $q + p$? Метры или $\frac{\text{кг}\times\text{м}}{\text{сек}}$? Если наши расчёты показывают значение 5 для $p + q$ в метрической системе, каков будет результат при переходе к аршинам и пудам? Так как такие вопросы не допускают внятного ответа, то предположение Дирака не совместимо с физическим смыслом теории.

Другое распространённое определение, хромающее на ту же ногу, часто используется в хороших книгах написанных отличными математиками, см. например [17, § 1.1; 26, § 2-2]. Оно вводит квантовые наблюдаемые как проекторнозначные меры на *безразмерной* действительной прямой. Такое определение немедленно влечёт (посредством функционального исчисления операторов) существование новых наблюдаемых заданных алгебраическими выражениями [26, § 2-2, p. 63]:

> Because of Axiom III, expressions such as A^2, $A^3 + A$, $1 - A$, and e^A all make sense whenever A is an observable.[4]

Однако, если A не является безразмерной величиной то выражение $A^3 + A$ не может иметь никакую согласованную с этим размерность.

Конечно, физические дефекты этих (безупречных в математическом отношении) построений не мешают физикам получать правильные ответы, которые прекрасно согласуются с экспериментом. Нет смысла обсуждать какими способами это достигается. Более полезно попытаться обозначить математические основания, которые не будут страдать описанными недостатками.

3. Несущественная некоммутативность

Хотя мы можем складывать только наблюдаемые одной и той же размерности, нет никаких ограничений такого рода на умножение физических величин. Естественно, размерность произведения равна произведению размерностей сомножителей, поэтому коммутатор $[A, B] = AB - BA$ всегда определён для произвольных величин A и B. В частности, коммутатор (1) вполне определён. Но так ли он важен для построения квантовой механики?

Можно утверждать, что некоммутативность физических величин не является *необходимым предпосылкой* для оснований квантовой теории: хорошо известны схемы обходящиеся без этого. Наиболее выдающийся пример—интеграл по путям развитый Фейнманом (и предложенный, опять же, Дираком). Что бы выявить действительно существенные элементы обратимся в начале к популярным лекциям [15], которые представляют основу метода в очень доступной форме. Фейнман смог рассказать главные моменты квантовой электродинамики не упомянув некоммутативность ни разу.

Может быть это просто следствие поверхностности изложения? Возьмём вполне академический учебник [16]. В нём некоммутативность упоминается лишь на страницах 115–6 (§ 5-3) и 176 (§ 7-3). В дополнение, на странице 355

[4] «Вследствие Аксиомы III, выражения вроде A^2, $A^3 + A$, $1 - A$ и e^A все имеют смысл если A является наблюдаемой.»

(§ 12-10) упоминается некоммутативность кватернионов, но это не относится к нашему обсуждению. Более того, на странице 176 подчёркивается, что некоммутативность квантовых величин является *следствием* техники интегрирования по путям, а не самоценной аксиомой.

Что же является математическим основанием квантовой теории, если некоммутативность не так важна? Наглядное повествование в [15] использует секундомер для исчисления квантовой амплитуды. Угол поворота стрелки секундомера представляет *фазу* для пути $x(t)$ между двумя точками конфигурационного пространства. Математическое выражение для этой фазы мы можем найти в [16, (2-15)]:

$$\phi[x(t)] = \mathrm{const} \cdot e^{(\mathrm{i}/\hbar)S[x(t)]}, \tag{2}$$

где $S[x(t)]$—*классическое действие* вдоль пути $x(t)$. Сложив все вклады вида (2) вдоль всех возможных путей[5] между двумя точками a и b мы получаем амплитуду перехода $K(a,b)$. Эта величина содержит в себе очень аккуратное описание многих квантовых эффектов. Поэтому выражение (2) также претендует на роль краеугольного камня квантовой теории.

Но есть ли хоть что-то общее между двумя *основополагающими* формулами (1) и (2)? На первый взгляд, нет. При более детальном рассмотрении можно заметить, что есть только два общих элемента. Перечисленные в порядке значимости (каковой она зачастую представляется) это:

(1) Ненулевая постоянная Планка $\hbar$.
(2) Мнимая единица i.

Действительно, постоянная Планка была исторически первой характеристикой квантового (дискретного) поведения и вне всякого сомнения принадлежит ядру всей теории. Более того, классическая механика зачастую мыслится как переход от точной квантовой теории в полуклассическом пределе $\hbar \to 0$. Поэтому, ненулевая постоянная Планка считается явным признаком квантового мира в его оппозиции к классической механике. К сожалению, широко распространена традиция «выбирать такую систему единиц, в которой $\hbar = 1$». В результате, постоянная Планка исчезает из многих формул, где её присутствие было важно. Отметим так же, что 1 в равенстве $\hbar = 1$ не является безразмерным скаляром, но физической величиной с размерностью действия. Следовательно, простая экономия на опускании этой постоянной нарушает размерность всех физических тождеств.

Мнимая единица так же является непременным участником любых формулировок квантовой теории. Достаточно указать, что популярные лекции [15] прекрасно обходятся без всякого упоминания некоммутативности, но содержат комплексные числа как явно (см. указатель в этой книге), так и неявно—вращение стрелки секундомера наглядно изображает изменение унимодулярной комплексной фазы (2) вдоль пути. И это второе (неявное, но очень существенное) использование комплексных чисел даже важнее их краткого явного упоминания. Тем не менее, комплексные числа зачастую воспринимаются как полезный, но всё же *чисто технический* элемент теории.

4. Квантовая механика и группа Гейзенберга

В поисках источника квантовой теории мы вновь возвращаемся к коммутационным соотношениям (1): или в роли необходимой аксиомы, или как важное следствие, но они являются обязательным элементом теории. Достаточно

[5] Мы здесь не касаемся вопроса, каким образом можно математически безупречно обосновать эту процедуру.

давно стало понятно, что эти соотношения являются представлением структурных тождеств для алгебры Ли группы Гейзенберга [17–19]. В простейшем случае одного измерения, группа Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ представляется Евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$ с такой групповой операцией:

$$(s,x,y)*(s',x',y') = (s+s'+\tfrac{1}{2}\omega(x,y;x',y'), x+x', y+y'), \tag{3}$$

где ω является *симплектической формой* на $\mathbb{R}^2$ [1, § 37]:

$$\omega(x,y;x',y') = xy' - x'y. \tag{4}$$

Здесь, как и с интегралами по траекториям, мы видим ещё один пример квантового объекта определённого в терминах классического.

Группа Гейзенберга некоммутативна в следствии косо-симметричности симплектической формы: $\omega(x,y;x',y') = -\omega(x',y';x,y)$. Множество точек вида $(s,0,0)$ образует центр $\mathbb{H}^1$. Нам потребуются унитарные неприводимы представления $\mathbb{H}^1$ в бесконечномерных пространствах. В таком представлении ρ центр группы должен действовать умножением на комплексное число с единичным модулем, то есть $\rho(s,0,0) = e^{2\pi \mathrm{i}\hbar s} I$ для некоторого $\hbar \neq 0$.

Далее, важная теорема Стоуна—фон Неймана [17, § 1.5] устанавливает, что все унитарные неприводимые представления группы $\mathbb{H}^1$ с общим значением $\hbar$ унитарно эквивалентны. Из этого следует, что любые реализации квантовой механики представляющие соотношение (1) (к примеру, волновая механика Шредингера) унитарно эквивалентна матричной механике Гейзенберга.

В частности, любое унитарное неприводимое представление $\mathbb{H}^1$ эквивалентно подпредставлению следующего представления в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$:

$$\rho_\hbar(s,x,y) : f(q,p) \mapsto e^{-2\pi \mathrm{i}(\hbar s + qx + py)} f\left(q - \tfrac{\hbar}{2}y, p + \tfrac{\hbar}{2}x\right). \tag{5}$$

Здесь $\mathbb{R}^2$ может быть отождествленно с классическим *фазовым пространством*, где q обозначает координату в конфигурационном пространстве и p—соответствующий импульс. Функция $f(q,p)$ в (5) представляет состояние физической системы как амплитуду на фазовом пространстве. Поэтому, по сравнению с более известным представлением Шрёдингера на действительной оси (конфигурационном пространстве), представление (5) более интуитивно и имеет много технических достоинств [17, 19, 29]. Хотя, как было отмечено выше, оба представление унитарно эквивалентны.

Инфинитезимальные порождающие одно-параметрических подгрупп $\rho_\hbar(0,x,0)$ и $\rho_\hbar(0,0,y)$ в (5) есть операторы $\frac{1}{2}\hbar\partial_p - 2\pi \mathrm{i}q$ и $-\frac{1}{2}\hbar\partial_q - 2\pi \mathrm{i}p$. Для них непосредственно проверяется тождество:

$$[-\tfrac{1}{2}\hbar\partial_q - 2\pi \mathrm{i}p, \tfrac{1}{2}\hbar\partial_p - 2\pi \mathrm{i}q] = \mathrm{i}h, \qquad \text{где } h = 2\pi\hbar.$$

Так как мы имеем представление тождества (1), эти операторы могут использоваться как представители квантовых наблюдаемых координаты и импульса.

Имея классический гамильтониан $H(q,p)$, мы можем проинтегрировать его преобразование Фурье $\hat{H}(x,y)$ с представлением $\rho_\hbar$:

$$\tilde{H} = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{H}(x,y)\, \rho_\hbar(0,x,y)\, dx\, dy$$

и получим (возможно неограниченный) оператор $\tilde{H}$ на $L_2(\mathbb{R}^2)$. Такое соответствие оператора $\tilde{H}$ (квантовой наблюдаемой) к функции $H(q,p)$ (классической наблюдаемой) известно как *квантование Вейля* или *исчисление Вейля* [17, § 2.1]. Гамильтониан $\tilde{H}$ определяет динамику квантовой наблюдаемой $\tilde{k}$ через *уравнение Гейзенберга*:

$$\mathrm{i}h\frac{d\tilde{k}}{dt} = \tilde{H}\tilde{k} - \tilde{k}\tilde{H}. \tag{6}$$

Такое построение квантовой механики на основе унитарных неприводимых представлений группы Гейзенберга хорошо известно, см. например [17, 19, 22].

5. Классическая некоммутативность

Сейчас мы покажем, что в квантовой теории по-настоящему важным являются комплексные числа, а вовсе не ненулевая постоянная Планка, как принято думать. Конкретно, мы представим модель классической механики с ненулевой постоянной Планка, но с другими гиперкомплексными числами. Вместо мнимой единицы i со свойством $\mathrm{i}^2 = -1$ мы используем нильпотентную единицу ε такую, что $\varepsilon^2 = 0$. Хорошо известно, что порождённые ей *дуальные числа* связаны с относительностью Галилея [2, 7]—важной симметрией классической механики—так что её появление в нашем исследовании не такая уж и неожиданность. Скорее, мы должны удивляться, почему дуальные числа так мало известны и так редко используются в современной физике (да и математике).

Другой важной особенностью нашей модели классической механики является её некоммутативность. Таким образом, она опровергает предположение Дирака о некоммутативности как важнейшем источнике всех квантовых построений. Более того, наша модель будет выведена из всё той же группы Гейзенберга, что ещё больше роднит квантовую и классическую теории.

Рассмотрим четырёхмерную алгебру $\mathfrak{C}$ с базисом 1, i, ε и $\mathrm{i}\varepsilon$. Можно определить следующее представление $\rho_{\varepsilon h}$ группы Гейзенберга в пространство $\mathfrak{C}$-значных гладких функций [23, 25]:

$$\begin{aligned}(7)\qquad \rho_{\varepsilon h}(s,x,y):\ & f(q,p)\mapsto \\ & e^{-2\pi\mathrm{i}(xq+yp)}\left(f(q,p)+\varepsilon h\left(sf(q,p)+\frac{y}{4\pi\mathrm{i}}f'_q(q,p)-\frac{x}{4\pi\mathrm{i}}f'_p(q,p)\right)\right).\end{aligned}$$

Непосредственно проверяется тождество

$$\rho_{\varepsilon h}(s,x,y)\rho_{\varepsilon h}(s',x',y') = \rho_{\varepsilon h}((s,x,y)*(s',x',y'))$$

для группового умножения (3) на $\mathbb{H}^1$. Так как $\rho_{\varepsilon h}$ не является унитарным представлением в комплексном векторном пространстве, то оно не подпадает под действие теоремы Стоуна–фон Неймана. Оба представления (5) и (7) являются *некоммутативными* и действуют на функциях заданных на фазовом пространстве. Важное отличие между этими двумя представлениями таково:

- Представление (5) индуцировано (в смысле Макки [4, § 13.4]) *комплекснозначным* характером $\rho_\hbar(s,0,0) = e^{2\pi\mathrm{i}\hbar s}$ центра группы $\mathbb{H}^1$.
- Представление (7) сходным образом индуцировано характером в *дуальных числах* $\rho_{\varepsilon h}(s,0,0) = e^{\varepsilon h s} = 1+\varepsilon h s$ центра $\mathbb{H}^1$, ср. [5]. (Дуальные числа образуют двумерную коммутативную ассоциативную алгебру с базисом $\{1,\varepsilon\}$.)

Сходство представлений (5) и (7) будет ещё более наглядным если записать (7) в виде:

$$(8)\qquad \rho_\hbar(s,x,y): f(q,p)\mapsto e^{-2\pi(\varepsilon\hbar s+\mathrm{i}(qx+py))}f\left(q-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\varepsilon y, p+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\varepsilon x\right).$$

Здесь, для дифференцируемой функции k действительной переменной t, выражение $k(t+\varepsilon a)$ понимается как $k(t)+\varepsilon a k'(t)$ при произвольной константе $a\in\mathbb{C}$. Для аналитических функций действительной переменной это может быть обосновано через их разложение в ряд Тейлора [2; 3, § I.2(10); 9]. Родственный источник этого выражения находится также в варианте нестандартного анализа использующего идемпотентную единицу ε [8].

Инфинитезимальные порождающие для одномерных подгрупп $\rho_{\varepsilon h}(0,x,0)$ и $\rho_{\varepsilon h}(0,0,y)$ в представлении (7) соответственно есть:

$$d\rho^X_{\varepsilon h} = -2\pi \mathrm{i} q - \frac{\varepsilon h}{4\pi \mathrm{i}}\partial_p \quad \text{и} \quad d\rho^Y_{\varepsilon h} = -2\pi \mathrm{i} p + \frac{\varepsilon h}{4\pi \mathrm{i}}\partial_q.$$

Непосредственно вычисляется их коммутатор:

$$d\rho^X_{\varepsilon h}\cdot d\rho^Y_{\varepsilon h} - d\rho^Y_{\varepsilon h}\cdot d\rho^X_{\varepsilon h} = \varepsilon h. \tag{9}$$

Это тождество похоже на коммутационные соотношение Гейзенберга (1): коммутатор отличен от нуля и пропорционален постоянной Планка. Единственное различие заключается в замене мнимой единицы не нильпотентную. Природа этого замещения проявится когда мы проинтегрируем представление (7) с преобразованием Фурье $\hat{H}(x,y)$ гамильтониана $H(q,p)$:

$$\mathring{H} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{H}(x,y)\,\rho_{\varepsilon h}(0,x,y)\,dx\,dy = H + \frac{\varepsilon h}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}\right). \tag{10}$$

Мы получили дифференциальный оператор первого порядка на фазовом пространстве. Такой оператор порождает динамику классической наблюдаемой k—гладкой вещественно-значной функции на фазовом пространстве—посредством уравнения сходного с уравнением Гейзенберга (6):

$$\varepsilon h \frac{d\mathring{k}}{dt} = \mathring{H}\mathring{k} - \mathring{k}\mathring{H}.$$

Подставляя (10) и используя тождество $\varepsilon^2 = 0$ мы получаем:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial k}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial k}{\partial p}. \tag{11}$$

Это, естественно—*уравнение Гамильтона* в классической механике использующее *скобку Пуассона* двух функций H и k. Как отмечено в эпиграфе, Дирак предположил, что коммутатор должен *соответствовать* скобке Пуассона. Однако, мы обнаружили, что коммутатор в представлении (7) *в точности является* скобкой Пуассона.

Отметим, что и постоянная Планка, и нильпотентная единица сокращаются из окончательного уравнения (11), но для этого преобразования было важно, что $h \neq 0$. Такое застенчивое исчезновение в самый последний момент может объяснить, почему величины h и ε обычно остаются незамеченными в классической теории.

6. Заключение

В данной работе мы пересматриваем математические основания квантовой и классической механики, а так же роль гиперкомплексных единиц $\mathrm{i}^2 = -1$ и $\varepsilon^2 = 0$ в этих теориях. Для того, что бы сделать рассмотрение полным мы должны упомянуть третью логическую возможность: гиперболическую единицу j со свойством $\mathrm{j}^2 = +1$, см. [5, 20, 21, 24, 25, 27, 28], однако её обсуждение выходит за рамки данной статьи.

Сделанный анализ приводит к следующим заключениям:

(1) Некоммутативность не обязательно включать в аксиоматизацию квантовой теории, она естественно получается как следствие других базовых предпосылок.

(2) Некоммутативность не является отличительной чертой квантовой теории от классической, существуют некоммутативные модели классической механики.

(3) Ненулевая постоянная Планка вполне совместима с классической механикой. Нет никакой необходимости рассматривать полуклассический предел $\hbar \to 0$, в котором *константа* должна *стремится* к нулю.
(4) Нет никакой необходимости рассматривать множество наблюдаемых как алгебру, что несовместимо с базовыми физическим смыслом теории. Квантование можно производить по процедуре Вейля, которое требует от множества наблюдаемых с одной физической размерностью всего лишь структуры векторного пространства.
(5) Решающую роль в построении любой квантово-механической модели играет комплексная мнимая единица, см. (1) и (2). Классическая механика может быть получена заменой мнимой единицы на нильпотентную $\varepsilon^2 = 0$ в коммутационных соотношениях (9).

Заметим, что некоммутативность играла такую важную роль в построениях Дирака, потому что нетривиальный коммутатор требовался, как замена классической скобке Пуассона. Мы показали, что умножение классических наблюдаемых тоже может быть некоммутативным и в этом случае коммутатор в точности совпадает со скобкой Пуассона. Таким образом, водораздел между двумя теориями *не* проходит по линии коммутативно/некоммутативно.

Возможно, Дирак всё-таки прав предполагая, что есть всего лишь одно допущение, которое отделяет квантовую теорию от классической, см. его первую цитату в начале статьи. Мы можем разделить его в такой форме:

> Квантовая механика частицы основана на использовании мнимой единицы для индуцирования представления группы Гейзенберга с её центра. При замене мнимой единицы на нильпотентную получаем классическую механику, причём все остальные компоненты теории (некоммутативность, ненулевая постоянная Планка, динамическое уравнение основанное на коммутаторе) остаются неизменным.

Благодарности

Автор благодарен анонимному рецензенту журнала *Mathematical Intelligencer* за критический отзыв, который позволил немного улучшить изложение в данной статье и потребовал заметного увеличения числа дословных цитат. Ещё более полезным отзыв оказался тем, что укрепил уверенность автора в необходимости этой статьи.

Я так же благодарен рецензенту журнала «Известия Коми НЦ УрО РАН» который подсказал выражение (8) для классического представления группы Гейзенберга. Хочу так же выразить признательность Н.А. Громову за полезные обсуждения различных вопросов связанных с нильпотентной единицей.

Список литературы

[1] В. И. Арнольд. *Математические методы классической механики.* 3-е изд. «Наука», М., 1989.
Перевод на английский: V. I. Arnol′d, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1991. ↑5

[2] Н. А. Громов. *Контракции и аналитические продолжения классических групп. Единый подход.* Акад. Наук СССР Урал. Отдел. Коми Научн. Центр, Сыктывкар, 1990. ↑6, 7

[3] Д. Н. Зейлигер. *Комплексная линейчатая геометрия. Поверхности и конгруэнции*, ГТТИ, Л., 1934. ↑7

[4] А. А. Кириллов. *Элементы теории представлений.* «Наука», М., изд.2. Год выпуска: 1978.
Перевод на английский: A. A. Kirillov, *Elements of the theory of representations*, Springer-Verlag, Berlin, 1976, Translated from the Russian by Edwin Hewitt, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 220. ↑6

[5] В. В. Кисиль. Индуцированные представления группы $SL_2(\mathbb{R})$ и гиперкомплексные числа. *Известиях Коми научного центра УрО РАН* 5 (1):4–10, 2011. E-print: arXiv:0909.4464. ↑6, 8

[6] Л. Д. Фаддеев и О. А. Якубовский. *Лекции по квантовой механике для студентов-математиков.* Из-во Ленинградского университета, Л., 1980.
Перевод на английский: L. D. Faddeev, O. A. Yakubovskiĭ, *Lectures on quantum mechanics for mathematics students*, Student Mathematical Library, 47 American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 2009 Translated by Harold McFaden. xii, 234 p. ↑2

[7] И. М. Яглом. *Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия.* «Наука», М., 1969.
Перевод на английский: I. M. Yaglom, *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis*, Heidelberg Science Library, Springer-Verlag, New York, 1979, Translated from the Russian by Abe Shenitzer, with the editorial assistance of Basil Gordon. ↑6

[8] John L. Bell. *A primer of infinitesimal analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, Second, 2008. ↑7

[9] Francesco Catoni, Roberto Cannata, and Enrico Nichelatti. The parabolic analytic functions and the derivative of real functions. *Adv. Appl. Clifford Algebras* 14 (2):185–190, 2004. ↑7

[10] Joachim Cuntz. Quantum spaces and their noncommutative topology. *Notices Amer. Math. Soc.* 48 (8):793–799, 2001. ↑2

[11] P. A. M. Dirac. On the theory of quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 112 (762):661–677, 1926. ↑2

[12] P. A. M. Dirac. Quantum mechanics and a preliminary investigation of the hydrogen atom. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 110 (755):561–579, 1926. ↑1, 2

[13] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics.* Oxford University Press, London, 4th ed., 1958.
Русский перевод: П. Дирак, *Принципы квантовой механики*, М.: «Наука», 1979. ↑2, 3

[14] Paul A. M. Dirac. *Directions in physics.* Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Five lectures delivered during a visit to Australia and New Zealand, August–September, 1975, With a foreword by Mark Oliphant, Edited by H. Hora and J. R. Shepanski.
Русский перевод П.А.М. Дирак, *Пути физики*, М.: «Энеоглатомиздат», 1983. ↑2

[15] R.P. Feynman. *QED: the strange theory of light and matter.* Penguin Press Science Series. Penguin, 1990.
Русский перевод: Ричард Фейнман, *КЭД – странная теория света и вещества* (выпуск 66 серии “библиотечка квант”) М., Наука, 1988 – 144 с. http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-kvant/ked.htm. ↑3, 4

[16] R.P. Feynman and A.R. Hibbs. *Quantum mechanics and path integral.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
Русский перевод: Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям.* Пер с англ. – М.: Мир, 1968. 384 с. ↑4

[17] Gerald B. Folland. *Harmonic analysis in phase space.* Annals of Mathematics Studies, vol. 122. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. ↑3, 5, 6

[18] Roger Howe. On the role of the Heisenberg group in harmonic analysis. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 3 (2):821–843, 1980. ↑5

[19] Roger Howe. Quantum mechanics and partial differential equations. *J. Funct. Anal.* 38 (2):188–254, 1980. ↑5, 6

[20] Robin Hudson, *Generalised translation-invariant mechanics.* D. Phil. thesis, Bodleian Library, Oxford, 1966. ↑8

[21] Andrei Khrennikov. *Contextual approach to quantum formalism.* Fundamental Theories of Physics, vol. 160. Springer, New York, 2009. ↑8

[22] Vladimir V. Kisil. p-Mechanics as a physical theory: an introduction. *J. Phys. A* 37 (1):183–204, 2004. E-print: arXiv:quant-ph/0212101, On-line. Zbl1045.81032. ↑6

[23] Vladimir V. Kisil. Erlangen programme at large: an Overview. In S.V. Rogosin and A.A. Koroleva (eds.) *Advances in applied analysis*, pages 1–78, Birkhäuser Verlag, Basel, 2012. E-print: arXiv:1106.1686. ↑6

[24] Vladimir V. Kisil. *Geometry of Möbius transformations: Elliptic, parabolic and hyperbolic actions of* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$. Imperial College Press, London, 2012. Includes a live DVD. ↑8

[25] Vladimir V. Kisil. Hypercomplex representations of the Heisenberg group and mechanics. *Internat. J. Theoret. Phys.* 51 (3):964–984, 2012. E-print: arXiv:1005.5057. ↑6, 8

[26] George W. Mackey. *Mathematical foundations of quantum mechanics.* W.A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam, 1963. ↑3

[27] Valery N. Pilipchuk. *Nonlinear dynamics. Between linear and impact limits.* Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, vol. 52. Springer, Berlin, 2010. ↑8

[28] S. Ulrych. Considerations on the hyperbolic complex Klein-Gordon equation. *J. Math. Phys.* 51 (6):063510, 8, 2010. ↑8

[29] Cosmas Zachos. Deformation quantization: quantum mechanics lives and works in phase-space. *Internat. J. Modern Phys. A* 17 (3):297–316, 2002. E-print: arXiv:hep-th/0110114. ↑5

School of Mathematics, University of Leeds, Leeds LS2 9JT, UK
E-mail address: kisilv@maths.leeds.ac.uk
URL: http://www.maths.leeds.ac.uk/~kisilv/